

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LX - ANNO CXXXII

(1993)



LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LX - ANNO CXXXII

(1993)

LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1994

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento, totale o parziale, sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, ottico o magnetico (comprese copie fotostatiche, microfilm e microfiches).

Prima edizione italiana Febbraio 1994

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2000 1999 1998 1997 1996 1995 1994

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Printed in Italy, Officine Grafiche Liguori, Napoli

ISBN 88-207-2381-6

INDICE

F. Capone, M. De Angelis - <i>On the Energy Stability of Fluid Motions in Exterior of a Sphere under free Boundary Like Conditions</i>	pag. 7
A. Ferone - <i>Symmetrization for Degenerate Neumann Problems</i>	» 27
P. Russo, R. Chirone - <i>Modelling of Cluster-Sub-cluster Structures in Sound Assisted Fluidization</i>	» 47
L. Di Fiore, S. Freni - <i>Sui sistemi lineari di forme la cui jacobiana ha dimensione irregolare</i>	» 57
A. d'Alessio, L. D'Amore, G. Laccetti - <i>First Results About the Tikhonov Regularization Methods for Numerically Inverting a Laplace Transform Function</i>	» 75
A. Marzocchella - <i>Flusso di gas attraverso un cilindro poroso indefinito</i>	» 103
A. Dolcini - <i>A Div-Curl Result in Orlicz Spaces</i>	» 113
A. Pinto - <i>Il Museo di Mineralogia e l'Antica Biblioteca Gesuitica del Collegio Massimo</i>	» 121
A. Ietto, E. Perri, C. Silvagni - <i>La successione dolomitica triassica di Monte Cocuzzo (Calabria, Catena Costiera)</i>	» 147
V. Ferreri, F. Ardillo, F.P. Buonocunto, N. Pelosi - <i>Il Cretacico Superiore del Monte Tobenna (Salerno). Studio sulla ciclicità di alta frequenza in depositi carbonatici di piattaforma</i>	» 165
L. Paolillo, G. D'Auria, L. Falcigno, M. Saviano, C. Di Bello - <i>Structural Studies on Pro-Oxytocin-Neurophysin Peptides Reproducing the Dibasic Processing Site</i>	» 195
G. Rolandi, D. Stanzione - <i>Aspetti idrogeologici e idrogeochimici nei Campi Flegrei settentrionali nell'area compresa tra i vulcani Astroni e Pisani</i>	» 215
R. Siciliano, A. Cantilena, A. Amoresano, P. Pucci - <i>Determination of Monosaccharide Composition in Glycoproteins using Gas-Chromatography Mass Spectrometry</i>	» 253

ON THE ENERGY STABILITY OF FLUID MOTIONS IN EXTERIOR OF A SPHERE UNDER FREE BOUNDARY LIKE CONDITIONS

Nota di Florinda Capone * e Monica De Angelis**
Presentata dal Socio Prof. S.Rionero

Adunanza del 16/1/93

Riassunto. Si ottengono condizioni di stabilità non lineare nella norma di L^2 per i moti dei fluidi newtoniani incompressibili e viscosi all'esterno di una sfera, sotto condizioni al contorno del tipo frontiera libera. I risultati ottenuti sono applicati poi al caso di sorgenti e di pozzi spaziali.

Abstract. Criteria of energy stability of viscous incompressible fluid motions occurring in exterior of a sphere are proved. The results obtained are applied to spatial sources and sinks.

1. Introduction.

The non-linear stability of viscous incompressible fluid motions occurring in exterior domains has been considered recently in [4], [8] under assigned velocity on the boundary. The same question, in the case of planar boundary, under free boundary like conditions, has been considered in [3], [6], [7], [10], [11], [12]. As free boundary like conditions we consider that ones assigning the normal component of velocity and the shear stresses on a fixed boundary.

In the present paper we consider the motions occurring in the exterior of a fixed sphere, under free boundary like conditions and study their stability in L^2 -norm. Our aim is to extend, in this more general frame, the analysis performed in [8]. The plan of the paper is the following one. Section 2 is dedicated to preliminaries and recalls. In Section 3 we introduce the L^2 -norm of the perturbation and, by using the special domain's geometry, we obtain two energy relations under mild condition at large spatial distances. After having obtained a weighted Poincaré inequality (Section 4), in Section 5, through this inequality and the energy relations, we prove two Stability Criteria. Finally, in Section 6, we apply the Criteria obtained to spatial sources and sinks.

2. Statement of the problem.

Let D be an exterior domain to a compact region D_0 filled by an homogeneous and viscous fluid. Let $m = (\underline{v}, p)$ be a basic flow satisfying the Navier - Stokes equations:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \nu \Delta_2 \underline{v} + \underline{F} \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0 \end{cases} \quad (\underline{x}, t) \in D \times [0, T)$$

with the following initial and boundary conditions:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0(\underline{x}) & \underline{x} \in D \\ \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_i = a(\underline{x}, t) & (\underline{x}, t) \in \partial D_0 \times [0, T) \end{cases},$$

where: $\underline{v}_0(\underline{x})$ (divergence free) and $a(\underline{x}, t)$ are ascribed functions; $\underline{n}_i$ is the unit internal normal to ∂D_0 ¹ and $\underline{F}(\underline{x}, t)$ represents the external force.

If at a given instant ($t=0$) $\underline{v}$ is perturbed by an amount $\underline{u}_0 = \underline{u}_0(\underline{x})$, the perturbation $(\underline{u}, \pi)$ has to verify in D the equations:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla \pi + \nu \Delta_2 \underline{u} \\ \nabla \cdot \underline{u} = 0 \end{cases} \quad (\underline{x}, t) \in D \times [0, T)$$

¹Of course if $\underline{N}_e$ is the unit exterior normal to ∂D , one has:

$$\underline{N}_e = -\underline{n}_i.$$

To (2.3) we append the initial and free boundary like conditions:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}_0(\underline{x}) & \underline{x} \in D \\ \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_i = 0 & (\underline{x}, t) \in \partial D_0 \times [0, T) \\ \underline{n}_i \cdot \underline{d} \times \underline{n}_i = 0 & (\underline{x}, t) \in \partial D_0 \times [0, T) \end{cases}$$

where: $\underline{d} = \frac{1}{2}[\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T]$ is the simmetric part of the stress tensor for the perturbation. Condition (2.4)₃ is obtained by assuming that on the boundary the shear stresses of the perturbation vanish (see for instance [12]).

Indicating by (r, θ, ϕ) a polar coordinate system with the origin in a fixed point O of D_0 , according to weighted energy method [8], let consider a positive scalar function $g=g(P) \in C^2(D)$ and the "cut-off" function:

$$(2.5) \quad \phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \leq R \\ 2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 - 9 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 12 \left(\frac{r}{R}\right) - 4 & \text{if } r \in [R, 2R] \\ 0 & \text{if } r \geq 2R \end{cases}.$$

It is easily verified that [8]:

$$(2.6) \quad \begin{cases} \phi(r) \in C^1(0, \infty) \\ \phi(r) \geq 0 \\ \frac{d\phi(r)}{dr} \leq 0 \\ \left| \frac{d\phi(r)}{dr} \right| \leq \frac{C}{R} \\ \left| \frac{d^2\phi(r)}{dr^2} \right| \leq \frac{C}{R^2} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \phi(r) = 1 \end{cases}$$

where C is an arbitrary positive constant. Now multiplying $(2.3)_1$ by $\phi g \underline{u}$ it follows:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (g \phi u^2) + g \phi (\underline{u} + \underline{v}) \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} + \phi g \underline{u} \cdot \nabla \underline{v} \cdot \underline{u} = -g \phi \nabla \pi \cdot \underline{u} + \nu g \phi \Delta_2 \underline{u} \cdot \underline{u}.$$

From this, because of:

$$i) -g \phi \nabla \pi \cdot \underline{u} = \nabla \cdot (-g \phi \pi \underline{u}) + \pi \nabla (g \phi) \cdot \underline{u}$$

$$ii) -g \phi \underline{u} \cdot \nabla \underline{v} \cdot \underline{u} = \nabla \cdot [-g \phi (\underline{u} \cdot \underline{v}) \underline{u}] + g \phi \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{v} + \nabla (g \phi) \cdot \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{v}$$

$$iii) \nu g \phi \Delta_2 \underline{u} \cdot \underline{u} = \nabla \cdot \left[\nu g \phi \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{\nu}{2} u^2 \nabla (g \phi) \right] + \frac{\nu}{2} u^2 \Delta_2 (g \phi) - \nu g \phi \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}$$

one has:

$$(2.7) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (g \phi u^2) = -g \phi (\underline{u} + \underline{v}) \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} + \nabla (g \phi) \cdot \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{v} + \pi \nabla (g \phi) \cdot \underline{u} + \\ + \frac{\nu}{2} u^2 \Delta_2 (g \phi) + g \phi \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{v} - \nu g \phi \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} + \\ + \nabla \cdot [-g \phi \pi \underline{u} - g \phi (\underline{u} \cdot \underline{v}) \underline{u}] + \nu g \phi \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{\nu}{2} u^2 \nabla (g \phi) \cdot \underline{u}.$$

Relation (2.7) will be the starting point for obtaining two energy relations in the L^2 -norm when the *domain of motion is the exterior of a sphere*.

3. Energy Relations.

The aim of this Section is to extend the two energy relations in the L^2 -norm proved in [8] for the homogeneous boundary conditions to the more general frame of free boundary like conditions.

Let us begin introducing some notations. By the symbol C we denote a generic positive constant whose numerical value is unessential and which may have several

different values in a single computation. For example, we may have in the same line $2C \leq C$. Finally by D_0 we denote a sphere of radius r_0 .

We now give sufficient conditions for the validity of *energy relations* in the L^2 -norm. To this end, we denote by $\mathcal{P}$ the class of admissible perturbations, namely, for arbitrarily fixed $T > 0$ we set:

$$\mathcal{P} = \{(\underline{u}, \pi) : |\underline{u}| \leq C; |\pi|(1+r)^\gamma \leq C \text{ in } D \times [0, T]\}.$$

where $\gamma > 1/2$.

Theorem 1. Let $(\underline{u}, \pi) \in \mathcal{P}$ and assume

$$(3.1) \quad |\underline{u}(\underline{x}, t)| \leq C \quad \text{in } D \times [0, T] ,$$

then, if there exists $t_0 \in [0, T)$ such that :

$$(3.2) \quad \int_D u^2(\underline{x}, t_0) dD < \infty$$

necessarily, for some $C = C(T) > 0$, it holds:

$$(3.3) \quad \int_D u^2(\underline{x}, t) dD + \int_{t_0}^T \int_D \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} dD d\tau \leq C \quad \forall t \in [t_0, T] .$$

Moreover, the following energy relations hold for all $t \in [t_0, T]$:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \int_D u^2(\underline{x}, t) dD &\leq \int_D u^2(\underline{x}, t_0) dD + \\ &- 2 \int_{t_0}^t \int_D [\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} + \nu \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}] dD d\tau + \\ &- \int_{t_0}^t \int_{\partial D_0} u^2 \underline{u} \cdot \underline{n}_i d\sigma d\tau . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad \int_D u^2(\underline{x}, t) dD &\leq \int_D u^2(\underline{x}, t_0) dD + \\
&+ 2 \int_{t_0}^t \int_D [\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{v} - \nu \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}] dD d\tau + \\
&- \int_{t_0}^t \int_{\partial D_0} u^2 \underline{v} \cdot \underline{n}_i d\sigma d\tau .
\end{aligned}$$

Proof. Let g be the scalar function:

$$g = \exp[-\alpha r]$$

with $\alpha \in (0, 1)$ and $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. If we integrate (2.7) over D , we obtain:

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad \frac{d}{dt} \int_D g \phi u^2(\underline{x}, t) dD &= \\
&= 2 \int_D \left[g \phi \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{v} + \nabla(g\phi) \cdot \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{v} + \pi \nabla(g\phi) \cdot \underline{u} + \frac{\nu}{2} u^2 \Delta_2(g\phi) \right] dD + \\
&- 2 \int_D g \phi [(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} + \nu \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}] dD + \\
&+ 2 \int_D \nabla \cdot [-g\phi(\underline{u} \cdot \underline{v}) \underline{u} - g\phi \pi \underline{u} + \nu g\phi \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{\nu}{2} u^2 \nabla(g\phi)] dD .
\end{aligned}$$

Now, for $(2.4)_2$, one has:

$$(3.7) \quad \int_D \nabla \cdot \{[-g\phi(\underline{u} \cdot \underline{v}) - g\phi \pi] \underline{u}\} dD = \int_{\partial D_0} [-g\phi(\underline{u} \cdot \underline{v}) - g\phi \pi] \underline{u} \cdot \underline{n}_i d\sigma = 0 ,$$

while, since $\underline{n}_i = -\underline{e}_r$, employing (2.6)_{2,3}, then it follows:

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad \int_D \nabla \cdot [u^2 \nabla (g \phi)] dD &= \int_{\partial D_0} u^2 \nabla (g \phi) \cdot \underline{n}_i d\sigma = \\
 &= \int_{\partial D_0} u^2 g [\phi'(r) - \alpha \phi] \underline{e}_r \cdot \underline{n}_i d\sigma = \\
 &= \int_{\partial D_0} u^2 g [-\phi'(r) + \alpha \phi] d\sigma \geq 0 .
 \end{aligned}$$

Moreover:

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \underline{n}_i \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} &= 2 \underline{n}_i \cdot \underline{d} \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot \nabla (\underline{u} \cdot \underline{n}_i) + \underline{u} \cdot \nabla \underline{n}_i \cdot \underline{u} = \\
 &= -2 \underline{e}_r \cdot \underline{d} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla u_r - \underline{u} \cdot \nabla \underline{e}_r \cdot \underline{u} .
 \end{aligned}$$

But, because of (2.4)₂ and (2.4)₃, $\underline{e}_r \cdot \underline{d} = -\underline{n}_i \cdot \underline{d}$ is parallel to $\underline{n}_i$ while $\underline{u}$ is orthogonal to $\underline{n}_i$, hence:

$$(3.10) \quad \int_{\partial D_0} \underline{e}_r \cdot \underline{d} \cdot \underline{u} d\sigma = 0 .$$

Now, recalling that:

$$u_r \equiv 0 \quad \forall P \in \partial D_0 \implies \frac{\partial u_r}{\partial \phi} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \quad \forall P \in \partial D_0 ,$$

then it follows:

$$(3.11) \quad \int_{\partial D_0} \underline{u} \cdot \nabla u_r d\sigma = 0 .$$

Further, since (see for instance [9]):

$$(3.12) \quad \nabla \underline{e}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

one has:

$$(3.13) \quad - \int_{\partial D_0} \underline{u} \cdot \nabla \underline{e}_r \cdot \underline{u} \, d\sigma = - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r_0} \leq 0 .$$

Hence from (3.9), employing (3.10), (3.11) and (3.13), then it follows:

$$(3.14) \quad \int_{\partial D_0} \underline{n}_i \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \, d\sigma \leq 0 .$$

Accounting for $\underline{u} \in \mathcal{P}$ and (3.1), the following inequalities hold:

$$(3.15) \quad \begin{cases} \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{v} \leq C u^2 + \eta \nu \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} \\ -(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \leq C u^2 + \eta \nu \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} \end{cases} , \quad \eta > 0 .$$

Substituting (3.7), (3.8), (3.14) and (3.15) in (3.6), one obtains:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D g \phi u^2 \, dD &\leq C \int_D g \phi u^2 \, dD + \\ &+ 2 \int_D [\nabla(g\phi) \cdot \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{v} + \pi \nabla(g\phi) \cdot \underline{u} + \frac{\nu}{2} u^2 \Delta_2(g\phi)] \, dD + \\ &+ 2(2\eta - 1)\nu \int_D g \phi \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} \, dD \end{aligned}$$

Accounting for (2.6), employing monotone convergence theorem and letting $R \rightarrow \infty$, then it follows:

$$\begin{aligned}
(3.17) \quad & \int_D g u^2(\underline{x}, t_2) dD \leq \int_D g u^2(\underline{x}, t_1) dD + \\
& + C \int_{t_1}^{t_2} \int_D g \left[u^2 + \nabla g \cdot \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{v} + \pi \nabla g \cdot \underline{u} + \frac{\nu}{2} \Delta_2 g u^2 \right] dD dt + \\
& + 2(2\eta - 1)\nu \int_{t_1}^{t_2} \int_D g \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} dD dt \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T], (t_1 < t_2)
\end{aligned}$$

Now, taking into account that $|\nabla g| = \alpha g$ and $\Delta_2 g \leq \alpha^2 g$, the following relations hold:

$$(3.18) \quad \begin{cases} \pi \nabla g \cdot \underline{u} \leq \frac{1}{2} g u^2 + \frac{\alpha^2}{2} g \pi^2 \\ \nabla g \cdot \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{v} \leq C g u^2 \\ \frac{\nu}{2} u^2 \Delta_2 g \leq \frac{\alpha^2}{2} \nu g u^2 \end{cases},$$

and hence if we assume $\eta < 1/2$, from (3.17), we have:

$$(3.19) \quad \int_D g u^2(\underline{x}, t_2) dD \leq \int_D g u^2(\underline{x}, t_1) dD + C \int_{t_1}^{t_2} \int_D [g u^2 + \alpha^2 g \pi^2] dD dr.$$

Since $\pi \in P$, by easily calculations, one can shows that:

$$(3.20) \quad \alpha^2 \int_D g \pi^2 dD \leq C \alpha^{2\gamma-1}.$$

Therefore, employing (3.20) and by using Gronwall's lemma, from (3.19), we have:

$$(3.21) \quad \int_D g u^2(\underline{x}, t) dD \leq C \left\{ \int_D g u^2(\underline{x}, t_0) dD + \alpha^{2\gamma-1} \right\} \quad \forall t \geq t_0 .$$

Recalling $\gamma > 1/2$, hypothesis (3.2) and letting $\alpha \rightarrow 0$ by the dominate convergence theorem, one obtains:

$$(3.22) \quad \int_D u^2(\underline{x}, t) dD \leq C \quad \forall t \geq t_0 .$$

Moreover taking into account (3.18) and the assumptions (3.20) and (3.22), from (3.17) it follows:

$$(3.23) \quad \int_{t_0}^t \int_D \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} dD d\tau \leq C \quad \forall t \geq t_0 .$$

Now we are in position to prove energy inequalities. Precisely we'll firstly demonstrate (3.5) and then immediately we'll deduce (3.4). In fact integrating equation (2.7) on $D \times [t_0, t]$ and recalling (3.7), (3.8) and (3.14), we have:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_D g \phi u^2(\underline{x}, t) dD &\leq \frac{1}{2} \int_D g \phi u^2(\underline{x}, t_0) dD + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_D [-g \phi(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} + \nabla(g \phi) \cdot \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{v} + \pi \nabla(g \phi) \cdot \underline{u}] dD d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_D \left[\frac{\nu}{2} u^2 \Delta_2(g \phi) + g \phi \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{v} - \nu g \phi \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} \right] dD d\tau . \end{aligned}$$

Now, since $\left\{ |\phi'(r)| \leq \frac{C}{R} \text{ and } |\phi''(r)| \leq \frac{C}{R^2} \right\}$, employing (2.4)₂, (3.22) and (3.23), easily follows:

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_D \nabla(g\phi) \cdot \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{u} \, dD \right| \leq C \left(\alpha + \frac{1}{R} \right) \\ \left| \int_D \nabla(g\phi) \cdot \underline{u} \pi \, dD \right| \leq C \left[\alpha^{\frac{2\gamma-1}{2}} + \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D g \pi^2 \, dD \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \left| \int_D g \phi \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \, dD \right| \leq C \left(\frac{1}{R} + \alpha \right) \\ \left| \int_D u^2 \Delta_2(g\phi) \, dD \right| \leq C \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} + \alpha \right) \end{array} \right.$$

Substituting in (3.24) and letting firstly $R \rightarrow \infty$ and then $\alpha \rightarrow 0$, we easily deduce (3.5).

Finally, since :

$$-\underline{u} \cdot \nabla \underline{v} \cdot \underline{u} = \nabla \cdot [-(\underline{v} \cdot \underline{u}) \underline{u}] + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{v}$$

from (3.5) one immediately deduces (3.4), too.

4. A Weighted Poincaré Inequality.

In order to obtain, from (3.4) and (3.5), conditions assuring stability in the L^2 -norm, we need the following weighted Poincaré inequality.

Lemma 1. Let S be the class of vector valued functions $\underline{u} : D \Rightarrow \mathcal{R}^3$ such that:

$$(4.1) \quad \int_D \left[\frac{u^2}{r^k} + \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} \right] dD < +\infty. \quad k \in [2, 3[.$$

For any $\underline{u} \in S$, the following inequality holds:

$$(4.2) \quad \int_D \frac{u^2}{r^k} dD \leq \left(\frac{2}{3-k} \right)^2 \int_D \frac{\nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}}{r^{k-2}} dD + \\ + \frac{2}{3-k} \int_{\partial D_0} \frac{u^2}{r^{k-1}} \underline{e}_r \cdot \underline{n}_i d\sigma$$

Proof. Let $\phi(r)$ be the "cut-off" function (2.5). From:

$$(4.5) \quad \nabla \cdot \left[\frac{\phi(r)u^2}{r^{k-1}} \underline{e}_r \right] = \frac{\phi'(r)u^2}{r^{k-1}} + \frac{2\phi(r)\underline{e}_r \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u}}{r^{k-1}} + \\ - \frac{(k-3)\phi(r)u^2}{r^k}$$

applying the Cauchy inequality we have:

$$(4.6) \quad (3-k-\epsilon) \frac{\phi(r)u^2}{r^k} \leq \nabla \cdot \left[\frac{\phi(r)u^2}{r^{k-1}} \underline{e}_r \right] + \\ + \frac{|\phi'(r)|u^2}{r^{k-1}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\phi(r)\nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}}{r^{k-2}}.$$

Since

$$|\phi'(r)| \leq \frac{C}{R},$$

from (4.6) one obtains:

$$\begin{aligned}
(4.7) \quad & (3-k-\epsilon) \int_D \frac{\phi(r)u^2}{r^k} dD \leq C \int_{D(R)} \frac{u^2}{r^k} dD_R + \\
& + \frac{1}{\epsilon} \int_D \phi(r) \frac{\nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}}{r^{k-2}} dD + \int_{\partial D_0} \frac{\phi(r)u^2}{r^{k-1}} \underline{e}_r \cdot \underline{n}_i d\sigma .
\end{aligned}$$

where $D(R) = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : R \leq r \leq 2R\}$.

Now, employing (4.1) , (2.6)₀ and letting $R \rightarrow \infty$, from (4.7) we have:

$$\begin{aligned}
(4.8) \quad & \int_D \frac{u^2}{r^k} dD \leq \frac{1}{\epsilon(3-k-\epsilon)} \int_D \frac{\nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}}{r^{k-2}} dD + \\
& + \frac{1}{3-k-\epsilon} \int_{\partial D_0} \frac{u^2}{r^{k-1}} \underline{e}_r \cdot \underline{n}_i d\sigma .
\end{aligned}$$

Then, minimizing the function $\epsilon^{-1}(3-k-\epsilon)^{-1}$, the lemma follows.

Remark 1. Let L be a lenght scale. Under the hypothesis (4.1) the following inequality holds:

$$\begin{aligned}
(4.9) \quad & \int_D \frac{u^2}{\left(\frac{r}{L}\right)^k} dD \leq \left(\frac{2L}{3-k}\right)^2 \int_D \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} dD + \\
& + \frac{2L}{3-k} \int_{\partial D_0} \frac{u^2}{\left(\frac{r}{L}\right)^{k-1}} \underline{e}_r \cdot \underline{n}_i d\sigma .
\end{aligned}$$

Remark 2. In the same hypothesis of lemma 4.1, when D_0 is a sphere, choosing as a lenght scale the radius r_0 of the sphere, immediately follows:

$$(4.10) \quad \int_D \frac{u^2}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^k} dD \leq \left(\frac{2r_0}{3-k}\right)^2 \int_D \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} dD - \frac{2r_0}{3-k} \int_{\partial D_0} u^2 d\sigma$$

5. Stability Criteria.

Let D be the domain exterior to the sphere:

$$D_0 = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq r_0\} ,$$

where r_0 is an arbitrary fixed positive constant. In the sequel we shall consider the following classes of basic motions:

$$(5.1) \quad C_1(k) = \left\{ (\underline{v}, p) : |\underline{v}|, m \equiv \sup_{t \geq t_0} \left[\sup_D |\nabla \underline{v}| \left(\frac{r}{r_0} \right)^k \right] < \infty ; \right.$$

$$\left. \frac{4mr_0}{3-k} + \underline{v} \cdot \underline{n}_i \geq 0 \quad \text{a.e. on } \partial D_0 \quad \forall t \geq t_0 \right\}$$

$$(5.2) \quad C_2(k) = \left\{ (\underline{v}, p) : V \equiv \sup_{t \geq t_0} \left[\sup_D |\underline{v} - \underline{v}_\infty| \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{k}{2}} \right] < \infty ; \right.$$

$$\left. \frac{2V^2 r_0}{\nu(3-k)} + \underline{v} \cdot \underline{n}_i \geq 0 \quad \text{a.e. on } \partial D_0 \quad \forall t \geq t_0 \right\} ,$$

where $k \in [2, 3)$ and $\underline{v}_\infty$ is a constant vector. In Section 6 we shall see that $C_i(k), (i = 1, 2)$ are not empty.

Theorem 2. (Stability Criterion I). Let R_1 (Reynolds number) $\equiv \frac{mL^2}{\nu}$. The basic motion $(\underline{v}, p) \in C_1(k)$ is stable in the class of perturbations $(\underline{v}, \pi) \in \mathcal{P}$ with $\int_D u^2(\underline{x}, t_0) dD < \infty$ if the condition:

$$(5.3) \quad R_1(k) \leq \left(\frac{3-k}{2} \right)^2 \quad \forall k \in [2, 3) ,$$

holds.

Proof. From (3.4), employing (4.10) and (5.1), we obtain:

$$\begin{aligned} \int_D u^2(\underline{x}, t) dD &\leq \int_D u^2(\underline{x}, t_0) dD + \\ &+ 2 \left[m r_0^2 \left(\frac{2}{3-k} \right)^2 - \nu \right] \cdot \int_{t_0}^t \int_D \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} dD d\tau + \\ &- \int_{t_0}^t \int_{\partial D_0} \left(\frac{4m r_0}{3-k} + \underline{v} \cdot \underline{n}_i \right) u^2(\underline{x}, t) d\sigma d\tau . \end{aligned}$$

Then from (5.1), the theorem immediately follows.

Theorem 3. (Stability Criterion II). Let $(\underline{u}, p) \in C_2(k)$. The basic motion $(\underline{u}, p)$ is stable in the class of perturbations $(\underline{u}, \pi) \in \mathcal{P}$ with $\int_D u^2(\underline{x}, t_0) dD < \infty$ if is:

$$(5.4) \quad R_2(k) \leq \frac{3-k}{2} \quad \forall k \in [2, 3) ,$$

where:

$$(5.5) \quad R_2(\text{Reynolds number}) \equiv \frac{VL}{\nu} .$$

Proof. Taking into account that:

$$(5.6) \quad \int_{t_0}^t \int_D \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{v}_\infty dD d\tau = 0 ,$$

recalling (4.10), from (3.5) one has:

$$\begin{aligned} \int_D u^2(\underline{x}, t) dD &\leq \int_D u^2(\underline{x}, t_0) dD + \\ &+ \nu \left[\frac{V^2 r_0^2}{\nu^2} \left(\frac{2}{3-k} \right)^2 - 1 \right] \cdot \int_{t_0}^t \int_D \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} dD d\tau + \\ &- \int_{t_0}^t \int_{\partial D_0} \left[\frac{2V^2 r_0}{\nu(3-k)} + \underline{v} \cdot \underline{n}_i \right] u^2(\underline{x}, t) d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

Hence from (5.2) the theorem immediately follows.

6. Applications.

In this section we shall apply the general stability results derived in the previous sections to some well known basic flows occurring in the exterior of a sphere. To this end let us consider the radial motion occurring in a domain D exterior to the sphere D_0 due to a general source put in a fixed point $O \in D_0$ [2]. We denote by (r, θ, ϕ) a polar coordinate system with the origin at O . In each point $P \in D$ we'll have a kinetic potential represented by the following elementar harmonic function [5]:

$$(6.1) \quad \phi(r) = -\frac{q}{4\pi r},$$

where q is the strength of the general source, equal to the flux of $\nabla\phi(r)$ through any closed surface surrounding the point O .

The correspondent steady solution to the Navier-Stokes equations, with $\underline{F} = \nabla U$, is the following one:

$$(6.2) \quad (\underline{u}, p) \equiv \left(\frac{q}{4\pi r^2} \underline{e}_r, -\frac{q^2}{32\pi^2 r^4} + U + \text{const.} \right),$$

with $\Delta_2 \underline{u} = 0$. This basic motion satisfies the following free boundary like conditions:

$$(6.3) \quad \begin{cases} \underline{v} \cdot \underline{n}_i = -\frac{q}{4\pi r_0^2} & \text{on } \partial D_0 \\ \underline{n}_i \cdot \underline{d} \times \underline{n}_i = 0 & \text{on } \partial D_0, \end{cases}$$

where $\underline{d} = \frac{1}{2}[\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T]$ is given by:

$$(6.4) \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} -\frac{q}{2\pi r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q}{4\pi r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q}{4\pi r^3} \end{pmatrix}$$

We'll consider the two cases: $q < 0$ (SINK) and $q > 0$ (SOURCE).

a) *Spatial Sink*

Now we prove that the spatial sink belongs to $C_2(k)$, $\forall k \in (2, 3)$. In fact, choosing as length scale the radius r_0 of D_0 , then it follows:

$$(6.5) \quad V \equiv \max_D |\underline{v} - \underline{v}_\infty| \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{k}{2}} \equiv \frac{q}{4\pi r_0^2} < \infty.$$

Moreover, since $q < 0$, one has:

$$(6.6) \quad \frac{2V^2 r_0}{\nu(3-k)} + \underline{v} \cdot \underline{n}_i = \frac{2V^2 r_0}{\nu(3-k)} - \frac{q}{4\pi r_0^2} > 0 \quad \text{on } \partial D_0.$$

Hence the spatial sink belongs to $C_2(k)$. In order to obtain non-linear stability bounds for the spatial sink, let us apply the Stability Criterion II.

Theorem 4. Let us define the Reynolds number setting [1]:

$$(6.7) \quad R = \frac{q}{\nu r_0} .$$

Then

$$(6.8) \quad R \leq 2\pi$$

assures the non linear energy stability of the sink.

Proof. Let

$$(6.9) \quad R = f(k)R_2(k) .$$

In order to apply theorem 3, one has to verify that:

$$(6.10) \quad \exists k \in [2, 3) : \frac{2\pi}{f(k)} \leq \frac{3-k}{2} .$$

Now, employing (5.5), (6.5) and (6.7), from (6.9) it follows that $f(k) = 4\pi$, so $\underline{v}$ is stable if

$$(6.11) \quad \exists k \in [2, 3) : \frac{3-k}{2}4\pi \geq 2\pi .$$

This is certainly true for $k = 2$.

b) *Spatial Source*

First of all we prove that the spatial source belongs to $C_1(k)$, $\forall k \in [2, 3)$. In this case, in fact, we have that:

$$(6.13) \quad m \equiv \max_D |\nabla \underline{v}| \left(\frac{r}{r_0} \right)^k = \frac{\sqrt{6}q}{4\pi r_0^3} < \infty .$$

Moreover, accounting for $q > 0$, one has:

$$(6.14) \quad \frac{4mr_0}{3-k} + \underline{v} \cdot \underline{n}_i = \frac{4mr_0}{3-k} - \frac{q}{4\pi r_0^2} > 0 \quad \text{on } \partial D_0 .$$

Therefore the spatial source belongs to $C_1(k)$. Hence, in this case, employing the Stability Criterion I, we can prove the following theorem that gives us a sufficient condition for the non-linear stability of the source.

Theorem 5. The condition

$$(6.15) \quad R \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

assures non linear energy stability of the source.

Acknowledgements.

Work performed under the auspices of the G.N.F.M. of the C.N.R. and M.U.R.S.T., 40 % and 60 % contracts. The Authors thank gratefully Prof. S.Rionero for having proposed the present research and for his helpful suggestions.

REFERENCES

- [1] R.Berker, *Integration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik , Bd VIII/2 (1963), 1-384.
- [2] Borisenko - Tarapov, "Vector and Tensor analysis with applications," Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1968).
- [3] S.Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability," Dover Publications, Inc. New York. (1961).
- [4] M.De Angelis, *On universal energy stability of fluid motions in unbounded domains*, Rendiconto Acc. Scienze Fisiche e Mat. Serie IV , LVII (1990), 5-24.
- [5] B.Finzi, "Lezioni di Aerodinamica," Libreria Editrice Politecnica Tamburini, Milano (1960).
- [6] G.P.Galdi, *Non linear stability of the magnetic Benard problem via a generalized energy method*, Arch. Rat. Mech. and Anal. 87 (1985), 167-186.

- [7] G.P.Galdi, M. Padula and K.R.Rajagopal, *On the conditional stability of the rest state of a fluid of second grade in unbounded domains*, Arch. Rat. Mech. and Anal. **109** n.2 (1990), 173-182.
- [8] G.P.Galdi and S.Rionero, *Lecture Notes in Mathematics* **1134**, "Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity," Springer Verlag.
- [9] A.M.Goodbody, "Cartesian Tensor: with applications to Mechanics Fluid Mechanics and Elasticity," Ellis Horwood Limited Publishers - Chichester. (1982).
- [10] D.D.Joseph, *On the stability of the Boussinesq equations*, Arch. Rat. Mech. and Anal.(1) **20** (1965), 59-71.
- [11] D.D.Joseph, *Nonlinear stability of the Boussinesq equations by the method of energy*, Arch. Rat. Mech. and Anal. **22** (1966), 163-184.
- [12] S.Rionero, *Sulla stabilità magnetoidrodinamica in media con vari tipi di condizioni al contorno*, Ricerche Mat. **17** (1968), 64-78.

* Università degli Studi di Napoli "Federico II". Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R.Caccioppoli", Complesso "Monte S. Angelo". Edificio "T". Via Cintia- 80126 Napoli.

** Università degli Studi di Napoli "Federico II". Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R.Caccioppoli". Facoltà di Ingegneria. Via Claudio, 21- 80125 Napoli.

SYMMETRIZATION FOR DEGENERATE NEUMANN PROBLEMS

NOTA DI ADELE FERONE

PRESENTATA DAL SOCIO GUIDO TROMBETTI

ADUNANZA DEL 16/1/1993

Riassunto Utilizzando tecniche di simmetrizzazione, si dimostrano un teorema di confronto e stime a priori per una soluzione debole di un problema di Neumann per una equazione ellittica degenera del secondo ordine, in forma di divergenza.

Abstract Using symmetrization techniques, we give a comparison result and a priori estimates for a weak solution of a Neumann problem for a second order degenerate elliptic equation in divergence form.

0. INTRODUCTION

Let G be a sufficiently regular open bounded subset of R^n with $n \geq 3$ (the

case $n = 2$ can be studied with usual modifications) and consider the following Neumann problem :

$$(0.1) \quad \begin{cases} -(a_{jk}u_{x_k})_{x_j} + b_j u_{x_j} = -(f_j)_{x_j} + g & \text{in } G \\ (a_{jk}u_{x_k} - f_j)n_j = 0 & \text{on } \partial G \end{cases}$$

where n_j are the components of the external normal to ∂G and :

- (i) $a_{jk}m^{-1} \in L^\infty(G)$, $a_{jk}\xi_j\xi_k \geq m(x)|\xi|^2$, $\forall \xi \in R^n$ and for a. e. $x \in G$
with $m(x) > 0$ in G , $m \in L^\infty(G)$, $m^{-1} \in L^t(G)$ $t \geq \frac{n}{2}$;
- (ii) $b_j m^{-1/2} \in L^q(G)$, $\frac{1}{q} < \frac{1}{n} - \frac{1}{2t}$;
- (iii) $f_j m^{-1/2} \in L^p(G)$, $p \geq 2$;
- (iv) $g \in L^s(G)$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2t}$.

We assume that a solution, unique modulo costants, of (0.1) exists (see [15]).

The aim of this note is to obtain a comparison result for a solution of the problem (0.1) using symmetrization techniques. As an application of this result, we give a priori estimates for the norm of the solution of the problem (0.1), in which the explicit value of the costant is given.

These techniques have been introduced by Talenti in [18] in the study of Dirichlet problem for non degenerate elliptic equations; degenerate elliptic equations have been considered in [4].

As regards Neumann problem for non degenerate equation, the first results (in case $b_j = f_j = 0$) have been obtained by Maderna and Salsa (see [16]), while the case $b_j = 0$ has been studied in [9] and the case $b_j \in L^\infty$ in [6]. The Neumann problem for degenerate equations is considered in [20] when $b_j = f_j = 0$, and in [6] when $b_j \in L^\infty$.

1. HYPOTHESES AND PRELIMINARIES

Throughout this paper we will assume that the open bounded set G satisfies a relative isoperimetric inequality, i. e. there exists a constant Q such that:

$$(1.1) \quad (\min\{|E|, |G \setminus E|\})^{1-\frac{1}{n}} \leq Q P_G(E)$$

for every measurable subset E of G , where $P_G(E)$ is the perimeter of E relative to G and $|E|$ is the measure of E (see [8]).

Given a measurable real valued function f in G the *distribution function* of f is:

$$\mu(\tau) = |\{x \in G : |f(x)| > \tau\}| \quad \forall \tau \geq 0$$

the *decreasing rearrangement* of f is :

$$f^*(\sigma) = \inf\{\tau \geq 0 : \mu(\tau) < \sigma\} \quad \forall \sigma \in [0, |G|]$$

and the *spherically symmetric rearrangement* of f is :

$$f^\#(x) = f^*(C_n |x|^n) \quad \forall x \in G^\#$$

where C_n is the measure of the n -dimensional unit ball and $G^\#$ is the ball with the center at the origin and measure $|G|$. We will use the following Hardy's inequality:

$$\int_G |f(x)g(x)|dx \leq \int_{G^\#} f^\#(x)g^\#(x)dx = \int_0^{|G|} f^*(\sigma)g^*(\sigma)d\sigma$$

where g and f are measurable real valued functions in G . For an exhaustive treatment of rearrangements see, for example, [3],[5] and [7].

Finally for $f \in L^p(G)$, with $p \geq 1$, we denote by

$$K(f) = \left\{ \underline{F} \in L^p(0, |G|) \text{ for which } \exists \{f_k\} \subseteq L^p(0, |G|) : \right. \\ \left. f_k^* = f^* \quad \text{and} \quad f_k \rightharpoonup \underline{F} \quad \text{in } L^p(0, |G|) \right\}.$$

Now we state a lemma of weak approximation, which is one of the main tools for the proof of theorem 1.

Consider a measurable function u and for any $\sigma \in [0, |G|]$ a subset $D(\sigma)$ of G such that:

$$|D(\sigma)| = \sigma$$

$$\sigma_1 < \sigma_2 \Rightarrow D(\sigma_1) \subseteq D(\sigma_2)$$

$$D(\sigma) = \{x \in G : |u(x)| > \tau\} \quad \text{if} \quad \sigma = \mu(\tau).$$

Hence, given a function $f \in L^p(G)$ there exists a function $\underline{F}(\tau)$ such that:

$$(1.2) \quad \int_{D(\sigma)} f(x) dx = \int_0^\sigma \underline{F}(\tau) d\tau \quad \forall \sigma \in [0, |G|].$$

The following lemma holds [4] :

LEMMA 1 : *If $f \in L^p(G)$, the function $\underline{F}(\tau)$ given by (1.2) belongs to $K(f)$.*

An obvious consequence of Lemma 1 is that :

$$(1.3) \quad \|\underline{F}\|_p \leq \|f\|_p.$$

Finally, recall the the following Gronwall's lemma :

LEMMA 2 : *Let λ, γ, ϕ , and μ measurable functions in $[\alpha, +\infty)$ and suppose that $\lambda \geq 0$, $\gamma \geq 0$ and $\lambda\gamma, \lambda\phi, \lambda\mu \in L^1(\alpha, +\infty)$. If for a. e. $\tau \geq \alpha$*

$$\phi(\tau) \leq \mu(\tau) + \gamma(\tau) \int_\tau^{+\infty} \lambda(\sigma) \phi(\sigma) d\sigma$$

then for a. e. $\tau \geq \alpha$

$$\phi(\tau) \leq \mu(\tau) + \gamma(\tau) \int_{\tau}^{+\infty} \mu(\sigma) \lambda(\sigma) \exp\left(\int_{\sigma}^{\tau} \lambda(\rho) \gamma(\rho) d\rho\right) d\sigma.$$

2. COMPARISON RESULT

Let $w \in H_m^1(G)$ be a weak solution of (0.1), i. e.

$$(2.1) \quad \int_G (a_{jk} u_{x_k} \phi_{x_j} + b_j u_{x_j} \phi) dx = \int_G f_j \phi_{x_j} dx + \int_G g \phi dx \quad \forall \phi \in H_m^1(G).$$

where $H_m^1(G)$ is (see [15]) the completion of the space $C^1(\bar{G})$ with respect to the norm :

$$\|u\|_{H_m^1(G)} = \left(\int_G m(x) |u|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_G m(x) |Du|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Following [16], if w is a solution of (0.1), let β be a costant such that, if $u = w - \beta$, we have

$$(2.2) \quad |\{x \in G : u_i(x) > 0\}| = |\text{sprt } u_i| \leq \frac{|G|}{2}, \quad i = 1, 2$$

where u_1 and u_2 are the positive and the negative part of u respectively ($u_1 = \max(u, 0)$ and $u_2 = \max(-u, 0)$). Clearly, u is still solution of (0.1) and our aim is to compare it with the solutions of two suitable Dirichlet problems. We denote by $\tilde{G}^\#$ the n -dimensional ball with center at the origin and measure $|G|/2$, and we put:

$$B^2(x) = \sum_{j=1}^n b_j^2(x) \quad \text{and} \quad F^2(x) = \sum_{j=1}^n f_j^2(x).$$

Let us define

$$m_i(x) = \begin{cases} m(x) & \text{in sprt } u_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_i(x) = \begin{cases} B(x) & \text{in sprt } u_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F_i(x) = \begin{cases} F(x) & \text{in sprt } u_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for $i = 1, 2$. According to (1.2) we call $\underline{m}_i^{-1}$, $\underline{B}_i^2$, $\underline{F}_i^2$ the functions built on the level sets of u_i , starting from m_i^{-1} , $B_i^2 m_i^{-1}$, $F_i^2 m_i^{-1}$, respectively. For the sake of brevity, we will put $\underline{m}_i = \underline{m}_i(C_n |x|^n)$ and we will use a similar notation for $\underline{F}_i$ and for $\underline{B}_i$. Consider the solutions v_i , V_i , $i = 1, 2$, of the following Dirichlet problems:

$$(2.3) \quad \begin{cases} -(\underline{m}_i v_{x_j})_{x_j} + \frac{Q}{\chi_n} \underline{B}_i \underline{m}_i^{1/2} \frac{x_j}{|x|} v_{x_j} = \left(\underline{F}_i \frac{x_j}{|x|} \right)_{x_j} & \text{in } \tilde{G}^\# \\ v = 0 & \text{on } \partial \tilde{G}^\# \end{cases}$$

and

$$(2.4) \quad \begin{cases} -(\underline{m}_i V_{x_j})_{x_j} + \frac{Q}{\chi_n} \underline{B}_i \underline{m}_i^{1/2} \frac{x_j}{|x|} V_{x_j} = g_i^\# & \text{in } \tilde{G}^\# \\ V = 0 & \text{on } \partial \tilde{G}^\# \end{cases}$$

where g_1 and g_2 are the positive and the negative part of g , respectively. We prove the following :

THEOREM 1 : *Consider the problem (0.1) with the assumptions (i), (ii), (iii) and (iv). Furthermore suppose that the open bounded set G of R^n satisfies (1.1). Let w be a solution of (0.1), $u = w - \beta$ the function verifying (2.2) and $\tilde{G}^\#$ the*

ball with center at the origin and measure $|G|/2$. If v_i ($i = 1, 2$) and V_i ($i=1, 2$) are the weak solutions of (2.3) and (2.4) respectively, we have:

$$u_i^\#(x) \leq \frac{Q}{\chi_n} v_i(x) + \frac{Q^2}{\chi_n^2} V_i(x) \quad \text{for a. e. } x \in \tilde{G}^\#$$

$i = 1, 2$ and $\chi_n = (nC_n)^{1/n}$.

PROOF. We follow a procedure that is now accepted as a classical one (cfr. [18], see also [16], [4], etc.). The Fleming-Rishel formula in a standard way (see [8], [10]), for a. e. $\tau \in [0, \text{ess.sup. } u_i]$ gives:

$$(2.5) \quad -\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} |Du_i| dx = P_G\{x \in G : u_i > \tau\} \quad i = 1, 2.$$

Let $\mu_i(\tau)$ be the distribution function of $u_i(x)$; from (2.2) we get:

$$\min\{\mu_i(\tau), |G| \setminus \mu_i(\tau)\} = \mu_i(\tau) \quad i = 1, 2$$

and so from (1.1) and (2.5) :

$$\mu_i(\tau)^{1-\frac{1}{n}} \leq Q \left(-\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} |Du_i| dx \right).$$

On the other hand, by Schwartz inequality and by lemma 1, we get:

$$-\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} |Du_i| dx \leq \left(\frac{-\mu_i'(\tau)}{\underline{m}_i(\mu_i(\tau))} \right)^{1/2} \left(-\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} m_i(x) |Du_i|^2 dx \right)^{1/2}.$$

So we have :

$$(2.6) \quad 1 \leq Q \left(\frac{-\mu_i'(\tau)}{\underline{m}_i(\mu_i(\tau))} \right)^{1/2} \mu_i(\tau)^{-1+\frac{1}{n}} \left(-\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} m_i(x) |Du_i|^2 dx \right)^{1/2}$$

for a. e. $\tau \in [0, \text{ess.sup. } u_i]$ and $i = 1, 2$. On the other hand, let us consider the functions, for $i = 1, 2$:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} h & \text{if } u_i > \tau + h \\ u_i(x) - \tau & \text{if } \tau < u_i(x) \leq \tau + h \\ 0 & \text{if } u_i \leq \tau \end{cases}$$

with $h > 0$, $\tau \in [0, \text{ess.sup. } u_i]$. We have that $\phi_i \in H_m^1(G)$ ([15]), so we can use it as test function in (2.1). Recalling that $u = (-1)^{i+1} u_i$ on $\text{sprt } u_i$ and using standard techniques (see for example [18], [16], [4], [6], [9]) based on hypothesis (i) and on Schwartz's inequality, we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\tau < u_i \leq \tau+h} m_i(x) |Du_i|^2 dx &\leq \int_{\tau < u_i \leq \tau+h} B_i(x) |Du_i| dx + \int_{u_i > \tau+h} B_i(x) |Du_i| dx + \\ &+ \left(\frac{1}{h} \int_{\tau < u_i \leq \tau+h} F_i^2(x) m_i^{-1}(x) dx \right)^{1/2} \left(\frac{1}{h} \int_{\tau < u_i \leq \tau+h} m_i(x) |Du_i|^2 dx \right)^{1/2} + \\ &+ (-1)^{i+1} \int_{u_i > \tau+h} g(x) dx + \int_{\tau < u_i \leq \tau+h} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

From the previous inequality letting h go to zero we obtain:

$$\begin{aligned} (2.7) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} m_i(x) |Du_i|^2 dx &\leq \int_{u_i > \tau} B_i(x) |Du_i| dx + \left(\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} m_i^{-1}(x) F_i^2(x) dx \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(-\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} m_i(x) |Du_i|^2 dx \right)^{1/2} + (-1)^{i+1} \int_{u_i > \tau} g(x) dx. \end{aligned}$$

By (ii), from Schwartz's inequality and from lemma 1 we get:

$$\begin{aligned} (2.8) \quad \int_{u_i > \tau} B_i(x) |Du_i| dx &= \int_{\tau}^{+\infty} \left(-\frac{d}{d\sigma} \int_{u_i > \sigma} B_i(x) |Du_i| dx \right) d\sigma \leq \\ &\leq \int_{\tau}^{+\infty} (-\mu_i'(\sigma))^{1/2} \underline{B}_i(\mu_i(\sigma)) \left(-\frac{d}{d\sigma} \int_{u_i > \sigma} m_i(x) |Du_i|^2 dx \right)^{1/2} d\sigma. \end{aligned}$$

Besides we obtain ([16])

$$(2.9) \quad \int_{u_i > \tau} (-1)^{i+1} g(x) dx \leq \int_0^{\mu_i(\tau)} g_i^*(\sigma) d\sigma.$$

From (iii) and lemma 1, using (2.6), (2.7), (2.8) and (2.9) , we get:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} m_i(x) |Du_i|^2 dx \right)^{1/2} \leq (-\mu'_i(\tau))^{1/2} \underline{E}_i(\mu_i(\tau)) + \\ & + \frac{Q(-\mu'_i(\tau))^{1/2}}{\underline{m}_i(\mu_i(\tau))^{1/2}} \mu_i(\tau)^{-1+\frac{1}{n}} \left[\int_0^{\mu_i(\tau)} g_i^*(\sigma) d\sigma + \int_{\tau}^{+\infty} (-\mu'_i(\sigma))^{1/2} \underline{B}_i(\mu_i(\sigma)) \times \right. \\ & \left. \times \left(-\frac{d}{d\sigma} \int_{u_i > \sigma} m_i(x) |Du_i|^2 dx \right)^{1/2} d\sigma \right]. \end{aligned}$$

Now using lemma 2 with $\phi(\tau) = \left(-\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} m_i(x) |Du_i|^2 dx \right)^{1/2}$ we get :

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{d}{d\tau} \int_{u_i > \tau} m_i(x) |Du_i|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ & (-\mu'_i(\tau))^{1/2} \underline{E}_i(\mu_i(\tau)) + \frac{Q(-\mu'_i(\tau))^{1/2}}{\underline{m}_i(\mu_i(\tau))^{1/2}} \mu_i(\tau)^{-1+\frac{1}{n}} \times \\ & \times \int_0^{\mu_i(\tau)} \left(g_i^*(\sigma) + \underline{E}_i(\sigma) \underline{B}_i(\sigma) \right) \exp \left(\int_{\sigma}^{\mu_i(\tau)} Q \frac{\rho^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\rho)^{1/2}} \underline{B}_i(\rho) d\rho \right) d\sigma \end{aligned}$$

then use (2.6) to see that :

$$\begin{aligned} 1 & \leq \frac{Q(-\mu'_i(\tau))}{\underline{m}_i(\mu_i(\tau))^{1/2}} \mu_i(\tau)^{-1+\frac{1}{n}} \underline{E}_i(\mu_i(\tau)) + Q^2 \mu_i(\tau)^{-2+\frac{2}{n}} \frac{(-\mu'_i(\tau))}{\underline{m}_i(\mu_i(\tau))} \times \\ & \times \int_0^{\mu_i(\tau)} \left(g_i^*(\sigma) + \underline{E}_i(\sigma) \underline{B}_i(\sigma) \right) \exp \left(\int_{\sigma}^{\mu_i(\tau)} Q \frac{\rho^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\rho)^{1/2}} \underline{B}_i(\rho) d\rho \right) d\sigma \end{aligned}$$

for a. e. $\tau \in [0, \text{ess.sup. } u_i[$. Integrating the previous inequality between 0 and τ , by the rearrangement definition, we have:

$$u_i^\#(x) \leq \frac{Q}{\chi_n} v_i(x) + \frac{Q^2}{\chi_n^2} V_i(x)$$

for a. e. $x \in \tilde{G}^\#$, where:

$$(2.10) \quad v_i(x) = \chi_n \int_{C_n|x|^n}^{|G|/2} \frac{\tau^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\tau)^{1/2}} \underline{F}_i(\tau) d\tau + \chi_n Q \int_{C_n|x|^n}^{|G|/2} d\tau \frac{\tau^{-2+\frac{2}{n}}}{\underline{m}_i(\tau)} \times \\ \times \int_0^\tau d\sigma \underline{F}_i(\sigma) \underline{B}_i(\sigma) \exp\left(\int_\sigma^\tau Q \frac{\rho^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\rho)^{1/2}} \underline{B}_i(\rho) d\rho\right)$$

and

$$(2.11) \quad V_i(x) = \chi_n^2 \int_{C_n|x|^n}^{|G|/2} d\tau \frac{\tau^{-2+\frac{2}{n}}}{\underline{m}_i(\tau)} \int_0^\tau g_i^*(\sigma) \exp\left(\int_\sigma^\tau Q \frac{\rho^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\rho)^{1/2}} \underline{B}_i(\rho) d\rho\right) d\sigma$$

for $i = 1, 2$. The functions defined by (2.10) and (2.11), are the solutions of the Dirichlet problems (2.3) and (2.4), respectively. ■

3. ESTIMATES IN L^p SPACES.

The theorem that we have proved in the previous section is not “sharp” in an absolute sense, because the functions $\underline{F}_i$, $\underline{B}_i$ and $\underline{m}_i$ we have used are related in some way to the solution of the problem itself. Nevertheless, using lemma 1, theorem 1 gives the possibility to estimate the norm in L^p of a solution w of (0.1).

In the following, as usual, we will denote by z' the Holder conjugate exponent of z and by z^* the Sobolev conjugate exponent, when $z > n$, that is, $(z^*)^{-1} = n^{-1} - z^{-1}$. Using Holder's inequality, it is easy to verify that for $\rho, \sigma \in \left[0, \frac{|G|}{2}\right]$:

$$(3.1) \quad \exp\left(\int_\sigma^\rho Q \tau^{-1+\frac{1}{n}} \frac{\underline{B}_i(\tau)}{\underline{m}_i(\tau)^{1/2}} d\tau\right) \leq K$$

where :

$$(3.2) \quad K = \exp \left(Q \|m^{-1}\|_t^{1/2} \|Bm^{-1/2}\|_q \left[\int_0^{|G|/2} \sigma^{(-1+\frac{1}{n}) \frac{2tq'}{2t-q'}} d\sigma \right]^{\frac{1}{q'} - \frac{1}{2t}} \right)$$

then we have:

$$(3.3) \quad V_i(x) \leq K \tilde{V}_i(x) \quad i = 1, 2$$

where $\tilde{V}_i$, $i = 1, 2$, are the weak solutions of the problems:

$$(3.4) \quad \begin{cases} -\left(m_i \tilde{V}_{x_j}\right)_{x_j} = g_i^\# & \text{in } \tilde{G}^\# \\ \tilde{V} = 0 & \text{on } \partial \tilde{G}^\# \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

The problems (3.4) $i = 1, 2$, have been already studied in [4] (see also [20]), so we will refer to this paper everytime we want to estimate the functions V_i , for $i = 1, 2$. We are now able to prove the following theorem :

THEOREM 2 : *With the assumptions of theorem 1, let w be a solution of (0.1).*

Then, for $t > n$ and $p \geq 2$, we have :

(a) *if $p > \frac{n(t-1)}{t-n}$ and $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} < \frac{2}{n}$ then $w \in L^\infty(G)$ and the following inequality holds:*

$$\begin{aligned} \text{ess.sup. } w - \text{ess.inf. } w &\leq 2^{\frac{p-1}{p}} A \|m^{-1}\|_t^{1-\frac{1}{p}} \|Fm^{-1/p}\|_p + \\ &\quad + K \left(\tilde{A}_1 \|g_1\|_s + \tilde{A}_2 \|g_2\|_s \right) \end{aligned}$$

where

$$(3.5) \quad \begin{aligned} A &= Q \left[\frac{p^* t}{t'(p^* t - p^*)} \right]^{\frac{1}{p^* t'}} \left(\frac{|G|}{2} \right)^{\frac{1}{p^*} - \frac{1}{p^* t}} + Q K \|m^{-1}\|_t^{1/2} \|Bm^{-1/2}\|_q \times \\ &\quad \times \left[\int_0^{|G|/2} d\rho \left(\int_\rho^{|G|/2} \sigma^{(-2+\frac{2}{n})} d\sigma \right)^{\frac{2qt p^* t'}{2qt - p^* t'(2t-q)}} \right]^{\frac{1}{p^* t'} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2t}} \end{aligned}$$

K is defined in (3.2) and $\tilde{A}_1$ and $\tilde{A}_2$ are two constants depending on m and g .

(b) If $2 \leq p < \frac{n(t-1)}{t-n}$ and $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{pt} + \frac{1}{n}$ then $w \in L^{\alpha(p)}(G)$ where:

$$(3.6) \quad \frac{1}{\alpha(p)} = \frac{1}{tp'} - \frac{1}{p^*}$$

and the following inequality holds :

$$\inf \{ \|\bar{w}\|_{\alpha(p)} : \bar{w} = w + c \} \leq \tilde{B} C \|m^{-1}\|_t^{1-\frac{1}{p}} \|Fm^{-1/p}\|_p + \\ + KD \left[\int_{-\frac{|G|}{2}}^{\frac{|G|}{2}} \left(\frac{1}{\tilde{m}(\sigma)} \right)^t [\|g_1\|_s \eta_1(\sigma) + \|g_2\|_s \eta_2(\sigma)]^t d\sigma \right]^{1/t}$$

where

$$(3.7) \quad \tilde{B} = \left[\frac{\alpha(p)}{p't'} \right]^{\frac{\alpha(p)}{p't'}} \left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/(p't'))' \Gamma(1+n/(p't'))} \right]^{\frac{\alpha(p)}{n}}$$

$$(3.8) \quad C = 2^{\frac{2t-1}{p't'}} Q \left\{ 1 + QK \|Bm^{-1/2}\|_q \|m^{-1}\|_t^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{2tq^*}{t'p(2t-q^*)} \right)^{\frac{1}{t'p}} \left(\frac{|G|}{2} \right)^{\frac{1}{q^*} - \frac{1}{2t}} \right]^{1/(p't')'} \right\}$$

$\eta_1(\sigma)$ and $\eta_2(\sigma)$ are the characteristic functions of $[0, \frac{|G|}{2}]$ and of $[-\frac{|G|}{2}, 0]$, respectively, $\tilde{m}$ is a function depending on g and having the same decreasing rearrangement of m , and $D = D(\alpha(p), Q)$.

PROOF. (a) Since :

$$\text{ess.sup. } u_i \leq \frac{Q}{\chi_n} v_i(0) + \frac{Q^2}{\chi_n^2} V_i(0) \quad i = 1, 2$$

we have :

$$\text{ess.sup. } w - \text{ess.inf. } w = \text{ess.sup. } u - \text{ess.inf. } u = \text{ess.sup. } u_1 + \text{ess.sup. } u_2.$$

So

$$(3.9) \quad \text{ess.sup. } w - \text{ess.inf. } w \leq \frac{Q}{\chi_n} (v_1(0) + v_2(0)) + \frac{Q^2}{\chi_n^2} (V_1(0) + V_2(0)).$$

We now estimate the term on the right hand side of (3.9). Setting $x = 0$ in (2.10) and integrating by parts we obtain :

$$(3.10) \quad v_i(0) = \chi_n \int_0^{|G|/2} \frac{\tau^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\tau)^{1/2}} \underline{F}_i(\tau) d\tau + \chi_n Q \int_0^{|G|/2} \underline{F}_i(\tau) \underline{B}_i(\tau) \times \\ \times \exp\left(\int_\tau^{|G|/2} Q \frac{\sigma^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\sigma)^{1/2}} \underline{B}_i(\sigma) d\sigma\right) \left(\int_\tau^{|G|/2} \sigma^{-2+\frac{2}{n}} d\sigma\right) d\tau.$$

On the other hand, from (1.3) and Holder's inequality we have :

$$(3.11) \quad \|\underline{F}_i\|_{\frac{2pt}{p-2+2t}} \leq \left(\int_G \left(F_i(x) m_i^{-1/2}(x) \right)^{\frac{2pt}{p-2+2t}} dx \right)^{\frac{p-2+2t}{2pt}} \leq \\ \leq \|m^{-1}\|_t^{\frac{p-2}{2p}} \left[\int_{u_i>0} \left(F(x) m^{-1/p}(x) \right)^p dx \right]^{1/p}.$$

From (3.10) and (3.11), by Holder's inequality we get :

$$v_1(0) + v_2(0) \leq \chi_n \frac{A}{Q} \|m^{-1}\|_t^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \left[\int_{u>0} \left(F(x) m^{-1/p}(x) \right)^p dx \right]^{1/p} + \right. \\ \left. \left[\int_{u<0} \left(F(x) m^{-1/p}(x) \right)^p dx \right]^{1/p} \right\}$$

where A is the costant defined in (3.5). By applying the following inequality :

$$(3.12) \quad a^{1/p} + b^{1/p} \leq 2^{(p-1)/p} (a+b)^{1/p} \quad a, b \geq 0, \quad p \geq 1$$

we obtain :

$$(3.13) \quad v_1(0) + v_2(0) \leq \chi_n \frac{A}{Q} 2^{\frac{p-1}{p}} \|m^{-1}\|_t^{1-\frac{1}{p}} \|Fm^{-1/p}\|_p.$$

Setting now $x = 0$ in (2.10), from (3.1), (3.2) and [20] we get:

$$(3.14) \quad V_1(0) + V_2(0) \leq \chi_n^2 \frac{K}{Q^2} \left(\tilde{A}_1 \|g_1\|_s + \tilde{A}_2 \|g_2\|_s \right).$$

From (3.8), using (3.13) and (3.14), follows the result.

PROOF. (b) It easy to see that:

$$(3.15) \quad \inf \{ \|\bar{w}\|_{\alpha(p)} : \bar{w} = w + c \} \leq \|u\|_{\alpha(p)} \leq \|u_1\|_{\alpha(p)} + \|u_2\|_{\alpha(p)} \leq \\ \leq \frac{Q}{\chi_n} (\|v_1\|_{\alpha(p)} + \|v_2\|_{\alpha(p)}) + \frac{Q^2}{\chi_n^2} (\|V_1\|_{\alpha(p)} + \|V_2\|_{\alpha(p)})$$

where $\alpha(p)$ is the constant defined in (3.6). As before we will limit ourselves to estimate the norm $\|v_i\|_{\alpha(p)}$:

$$\|v_i\|_{\alpha(p)} = \chi_n \left[\int_0^{+\infty} d\xi \left(\int_{\xi}^{|G|/2} \frac{\tau^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\tau)^{1/2}} \underline{F}_i(\tau) d\tau + \int_{\xi}^{|G|/2} d\tau \frac{\tau^{-2+\frac{2}{n}}}{\underline{m}_i(\tau)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^{\tau} \underline{F}_i(\rho) \underline{B}_i(\rho) \exp \left(\int_{\rho}^{\tau} Q \frac{\sigma^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\sigma)^{1/2}} \underline{B}_i(\sigma) d\sigma \right) d\rho \right)^{\alpha(p)} \right]^{\frac{1}{\alpha(p)}}$$

Using the Bliss' inequality [18] :

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_r^{+\infty} \phi(\rho) d\rho \right)^l dr \leq \hat{B} \left(\int_0^{+\infty} \phi(r)^c r^{-1+c+\frac{c}{l}} dr \right)^{l/c} \quad l > c > 1$$

where $\phi(r)$ is a non negative function for $0 < r < +\infty$ and where

$$\hat{B} = \left[l \left(1 - \frac{1}{c} \right) \right]^{l-\frac{l}{c}} \left[\frac{\Gamma(c l / (l - c))}{\Gamma(l / (l - c)) \Gamma(c(l - 1) / (l - c))} \right]^{\frac{l}{c}-1}$$

We obtain

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{\alpha(p)} &\leq \tilde{B}\chi_n \left[\int_0^{+\infty} d\tau \tau^{-1+(t'p')' \left(1+\frac{1}{\alpha(p)}\right)} \left(\frac{\tau^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\tau)^{1/2}} \underline{E}_i(\tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Q \frac{\tau^{-2+\frac{2}{n}}}{\underline{m}_i(\tau)} \int_0^\tau \underline{E}_i(\rho) \underline{B}_i(\rho) \exp\left(\int_\rho^\tau Q \frac{\sigma^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\sigma)^{1/2}} \underline{B}_i(\sigma) d\sigma\right) d\rho \right)^{(p't')'} \right]^{\frac{1}{(p't')'}} \end{aligned}$$

where $\tilde{B}$ is the costant defined in (3.7). Taking into account the inequality

$$(a+b)^\lambda \leq 2^{\lambda-1} (a^\lambda + b^\lambda) \quad a, b > 0 \quad \lambda > 1$$

we get:

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{\alpha(p)} &\leq 2^{1/(p't')} \tilde{B}\chi_n \left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{\underline{E}_i(\tau)}{\underline{m}_i(\tau)^{1/2}} \right)^{(p't')'} d\tau + Q^{(p't')'} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\tau^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\tau)} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_0^\tau \underline{E}_i(\rho) \underline{B}_i(\rho) \exp\left(\int_\rho^\tau Q \frac{\sigma^{-1+\frac{1}{n}}}{\underline{m}_i(\sigma)^{1/2}} \underline{B}_i(\sigma) d\sigma\right) d\rho \right)^{(p't')'} d\tau \right]^{\frac{1}{(p't')'}}. \end{aligned}$$

Finally, by Holder's inequality and by similar arguments we used for case (a)

we get :

$$(3.16) \quad \|v_1\|_{\alpha(p)} + \|v_2\|_{\alpha(p)} \leq \tilde{B}C \|m^{-1}\|_t^{1-\frac{1}{p}} \|Fm^{-1/p}\|_p$$

where C is the costant defined by (3.8). From (3.3) we get :

$$\|V_i\|_{\alpha(p)} \leq K \|\tilde{V}_i\|_{\alpha(p)} \quad i = 1, 2$$

and so, for $s = \alpha(p)$ (see [20]), we have :

$$\begin{aligned} (3.17) \quad \|V_1\|_{\alpha(p)} + \|V_2\|_{\alpha(p)} &\leq \frac{\chi_n^2}{Q^2} KD \left[\int_{-|G|/2}^{|G|/2} \left(\frac{1}{\tilde{m}(\sigma)} \right)^t \times \right. \\ &\quad \left. \times [\|g_1\|_s \eta_1(\sigma) + \|g_2\|_s \eta_2(\sigma)]^t d\sigma \right]^{1/t} \end{aligned}$$

where $\eta_1(\sigma)$ and $\eta_2(\sigma)$ are the characteristic functions of $[0, |G|/2]$ and $[-|G|/2, 0]$ respectively, and where $\tilde{m}$ is a function depending on g and having the same decreasing rearrangement of m . From (3.15), using (3.16) and (3.17) follows the result. ■

For the limit case $p = n(t-1)(t-n)^{-1}$ Murthy and Stampacchia [15] showed that the solutions w of (0.1) are in the Orlicz space L^Φ defined by the function $\Phi(\tau) = e^{|\tau|} - 1$. (See [1] and [14] for the exact definition and the properties of Orlicz spaces). On the other hand, Trudinger proved later that $W^{1,n}(G)$ is continuously imbedded in the Orlicz space L^Φ defined by $\Phi(\tau) = \exp(|\tau|^{n/(n-1)}) - 1$. ([21], Theorem 2, p.478). Hence one can expect that Murthy's and Stampacchia's result can be sharpened and that the solutions w of (0.1) are in the same Orlicz space as that found by Trudinger (that is with $\Phi(\tau) = \exp(|\tau|^{n/(n-1)}) - 1$).

The following theorem will give an estimate of $\|u\|_\Phi$ in term of $\|Fm^{-1/p}\|_p$ and of $\|g\|_s$, where

$$(3.18) \quad \|u\|_\Phi = \inf \left\{ \delta > 0 : \int_G \Phi\left(\frac{u}{\delta}\right) dx \leq 1 \right\}$$

and

$$(3.19) \quad \Phi(\tau) = \exp(|\tau|^{n/(n-1)}) - 1.$$

To this aim, let us recall the results due to Alvino [2], for which,

$$(3.20) \quad \|z\|_\Phi \leq \left(\frac{1+|G|}{n} \right)^{1-\frac{1}{n}} [z]_{1-\frac{1}{n}} \quad \forall z \in W_o^{1,n}(G)$$

where

$$[z]_{1-\frac{1}{n}} = \sup_{G^\#} \frac{u^\#(x)}{\log\left(\frac{\rho}{|z|}\right)^{1-1/n}}$$

where ρ is the radius of $G^\#$. In [2] it is proved also that $\forall z \in W_o^{1,n}(G)$

$$(3.21) \quad [z]_{1-\frac{1}{n}} \leq (nC_n)^{-1/n} \|Dz\|_n$$

and the constant is the best one. Recalling those results, we get :

THEOREM 3 : *If $p = \frac{n(t-1)}{t-n}$ and $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2t}$ then*

$$\|u\|_\Phi \leq Q \left(1 + \frac{|G|}{2}\right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\tilde{M} \|m^{-1}\|_t^{1-\frac{1}{p}} \|Fm^{-1/p}\|_p + Q\tilde{N} \|m^{-1}\|_t \|g\|_s\right)$$

where $\|u\|_\Phi$ is defined by (3.18) and by (3.19) and where:

$$(3.22) \quad \tilde{M} = 2^{\frac{1}{p'}} \left[1 + K \|m^{-1}\|_t^{1/2} \|Bm^{-1/2}\|_q \left(1 - \frac{1}{t^*} \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{t^*}} \left(\frac{|G|}{2}\right)^{\frac{1}{t^*} - \frac{1}{2t}}\right]$$

and

$$(3.23) \quad \tilde{N} = 2^{1/s'} K \left(2 - \frac{1}{t^*} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{t^*}} \left(\frac{|G|}{2}\right)^{\frac{2}{t^*} + \frac{1}{s} - \frac{1}{t}}$$

where K is the constant defined in (3.2).

PROOF. It is easy to see that :

$$(3.24) \quad \|u\|_\Phi \leq \|u_1\|_\Phi + \|u_2\|_\Phi \leq \frac{Q}{\chi_n} (\|v_1\|_\Phi + \|v_2\|_\Phi) + \frac{Q^2}{\chi_n^2} (\|V_1\|_\Phi + \|V_2\|_\Phi);$$

since it is possible to apply (3.20) and (3.21) to v_i and V_i , for $i = 1, 2$, (infact they are in $W_o^{1,n}(\tilde{G}^\#)$), recalling the expression of v_i and of V_i for $i = 1, 2$ and using Holder's inequality we have :

$$(3.25) \quad \|Dv_i\|_n \leq \left[1 + K \|m^{-1}\|_t^{1/2} \|Bm^{-1/2}\|_q \left(1 - \frac{1}{t^*} \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{t^*}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{|G|}{2}\right)^{\frac{1}{t^*} - \frac{1}{2t}}\right] \|m^{-1}\|_t^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_G (F_i m_i^{-1/2})^p dx\right)^{1/p}$$

and

$$(3.26) \quad \|DV_i\|_n \leq \chi_n K \left(2 - \frac{1}{t^*} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) \right)^{-\frac{1}{t^*}} \left(\frac{|G|}{2} \right)^{\frac{2}{t^*} + \frac{1}{s} - \frac{1}{t}} \|m^{-1}\|_t \left(\int_G g_i^s dx \right)^{1/s}.$$

From (3.20), using (3.21), (3.25) and (3.12) we get :

$$(3.27) \quad \|v_1\|_\Phi + \|v_2\|_\Phi \leq \chi_n \left(1 + \frac{|G|}{2} \right)^{1-\frac{1}{n}} \tilde{M} \|m^{-1}\|_t^{1-\frac{1}{p}} \|Fm^{-1/p}\|_p$$

where $\tilde{M}$ is the costant defined in (3.22). Similary, from (3.20), (3.21), (3.26) and from (3.12) we get :

$$(3.28) \quad \|V_1\|_\Phi + \|V_2\|_\Phi \leq \chi_n^2 \left(1 + \frac{|G|}{2} \right)^{1-\frac{1}{n}} \tilde{N} \|m^{-1}\|_t \|g\|_s$$

Finally, from (3.24), (3.36) and (3.28) we obtain the result. ■

REFERENCES

- [1] Adams R. A., "*Sobolev spaces*"; Academic Press, New York, San Francisco, London, (1975).
- [2] A. Alvino, "Un caso limite della disuguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz"; Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli XLIV (1977), p. 105-112.
- [3] A. Alvino , P. L. Lions and G. Trombetti, " On optimization problems with prescribed rearrangements"; Nonlinear Analysis, T.M.A., 13 (1989), p. 185-220.

- [4] A. Alvino and G. Trombetti, "Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri"; *Ricerche Mat.*, XXVII (1978), p. 413-428.
- [5] C. Bandle, "*Isoperimetric Inequalities and Applications*"; Monographs and Studies in Math., Pitman, London (1980), No 7.
- [6] M. F. Betta, "Neumann problem : comparison results"; *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat.*, Napoli LVII (1980), p. 41-58.
- [7] K. M. Chong and N. M. Rice, "*Equimisable rearrangements of functions*"; Queen's papers in pure and applied mathematics, No.28, Queen's University, Ontario (1971).
- [8] E. De Giorgi, "Su una teoria generale della misura $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio ad r dimensioni"; *Ann. Mat. Pura e Appl.*, 36 (1954), p. 191-213.
- [9] V. Ferone, "Symmetrization in a Neumann problem"; *Le Matematiche*, 41 (1988), p. 67-78.
- [10] W. Fleming and R. Rishel, "An integral formula for total gradient variation"; *Arch. Math.*, 11 (1960), p. 218-222.
- [11] E. Giarrusso and D. Nunziante, "Regularity theorems in limit cases for solutions of linear and non linear elliptic equations"; *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste*, 20 (1988), p. 39-58.
- [12] E. Giarrusso and G. Trombetti, "Estimates for solutions of elliptic equations in a limit case"; *Bull. Austral. Math. Soc.*, 36 (1987), p. 425-434.
- [13] B. Kawhol, "*Rearrangements and convexity of level sets in P.D.E.*"; *Lecture Notes in Math.*, No. 1150, Springer, Berlin-New York, (1985).
- [14] M. A. Krasnosel'skii and Y. A. Rutickii, "*Convex functions and Orlicz spaces*"; P. Noordhoff Ltd. Groningen, (1961).

- [15] M. K. V. Murthy and G. Stampacchia, "Boundary value problems for some degenerate elliptic operators"; Ann. Pura Appl., 90 (1971), p. 1-122.
- [16] C. Maderna and S. Salsa, "Symmetrization in Neumann problems"; Appl. Anal., 9 (1979), p. 247-256.
- [17] G. Stampacchia, "Some limit cases of L^p -estimates for solutions of second order elliptic equations"; Comm. Pure Appl. Math., XVI (1963), p. 505-510.
- [18] G. Talenti, "Elliptic equations and rearrangements", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 3 (1976), p. 697-718.
- [19] G. Talenti, "Best constant in Sobolev inequality"; Ann. Mat. Pura Appl. 100 (1976), p. 353-372.
- [20] M. Tricarico, "On the Neumann problem for a class of second order elliptic equations"; Le matematiche, 40 (1985), p. 63-82.
- [21] N. S. Trudinger, "On imbedding into Orlicz spaces and some applications"; J. Math. Mech., 17 (1967), p. 473-484.

MODELLING OF CLUSTER-SUBCLUSTER STRUCTURES IN SOUND ASSISTED FLUIDIZATION

nota di: P. Russo e R. Chirone
presentata dal Socio: Prof. Leopoldo Massimilla
Adunanza del 6/02/1993

Riassunto

L'applicazione di un campo acustico modifica il comportamento delle polveri coesive del Gruppo C (Geldart, 1973) in quello proprio di polveri fluidizzabili del Gruppo A. Il suono è in grado di rompere gli aggregati di particelle presenti nel letto in sub-aggregati fluidizzabili di dimensioni minori impedendo in tale modo la canalizzazione del gas nel letto. La rottura si realizza quando nei punti di contatto tra aggregati e sub-aggregati le forze di taglio esterne (forza di trascinamento e forza d'inerzia) indotte dal campo acustico prevalgono sulle forze coesive interne (van der Waals).

Abstract

The application of acoustic field may change the behaviour of cohesive C Group (Geldart, 1973) powders into that of fluidizable A Group solids. Sound breaks up clusters of bed particles into small fluidizable subclusters, thereby suppressing channelling. This happens when at contact points between clusters and subclusters external shear forces (drag and inertial) induced by the acoustic field prevail over internal (van der Waals) forces.

Key words: sound assisted fluidization
of beds of solids,
modelling.

INTRODUCTION

Chirone et al. (1993) and Russo et al. (1993) presented two models closely related to each other to describe the influence of sound on the quality of fluidization of Group C powders (Geldart, 1973). Both models assume that the bed is made of clusters and subclusters of particles subject to cohesive van der Waals forces (Fig.1). Clusters break up into subclusters when, due to the acoustic field, external (inertial and drag) forces exceed internal van der Waals

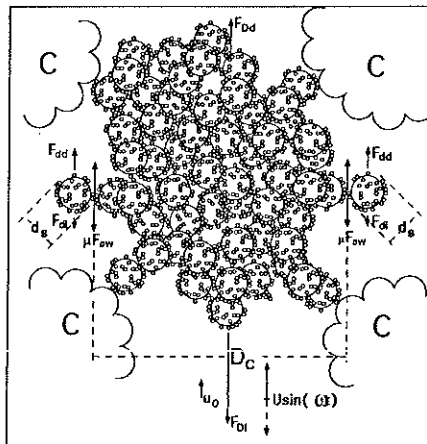


Fig.1-Cluster/Subcluster model (Chirone et al. 1993)

F_{Dd} , F_{dd} drag forces on the cluster and on the subcluster;

F_{Di} , F_{di} inertial forces on the cluster and on the subcluster;

C other clusters.

forces. The difference between Chirone et al. (1993) and Russo et al. (1993) models is that the first assumes that clusters and subclusters stick to each other forming rigid bodies, whereas the second accounts for elastic forces at contact points between clusters and subclusters. Both models further assume that the cluster is practically stationary in the space whatever the degree of break up of the original clusters into subclusters. Present work removes the assumption that the cluster is stationary in the space and considers attached cluster and subcluster as damped oscillators.

MODEL EQUATIONS

The model, schematically represented in Fig.2, is based on the following assumptions:

- i) cluster and subcluster have a spherical shape;
- ii) cluster and subcluster have the same density ρ . This assumption is made in spite of the fact that they have different densities of assemblages of particles although particles densities are the same;
- iii) overall velocity of gas impinging on the cluster and subcluster is the sum of two components, the upward velocity u_0 and the velocity $U \sin(2\pi f t)$ due to sound;
- iv) weights of cluster and subcluster are balanced by drag forces caused by the mean gas velocity u_0 . This is a first approximation hypothesis because, due to the difference between D_c and d_s , it is unlikely that the same gas velocity u_0 may equally balance a

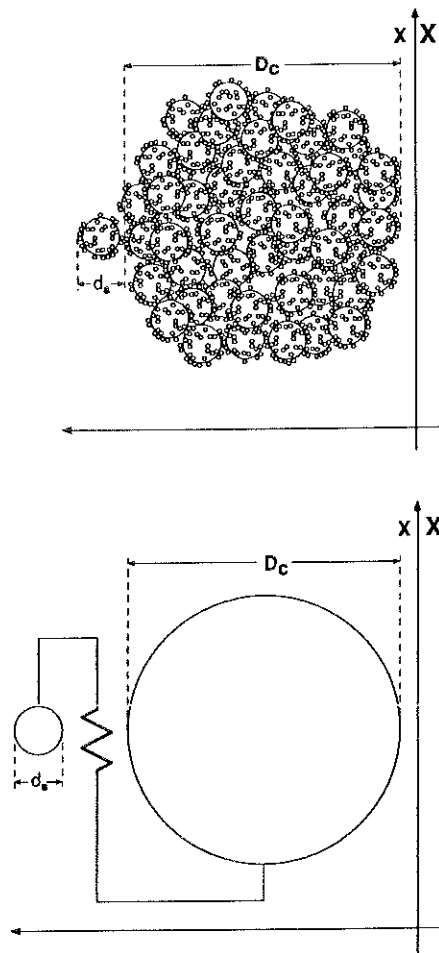


Fig.2 - Cluster-subcluster model

cluster and a subcluster;

- v) gas flow induced by acoustic field is viscous. Drag forces per unit gas velocity are:

$$\begin{aligned} C_{Dc} &= 3\pi\nu\rho_g D_c \\ c_{ds} &= 3\pi\nu\rho_g d_s \end{aligned} \quad (1)$$

for the cluster and the subcluster respectively. ν and ρ_g are the kinematic viscosity and the density of the gas;

- vi) elastic force acting at each contact point between a cluster and a subcluster is $\pm k(x - X)$ where k is the elastic constant and X and x the vertical displacement of the cluster and of the subcluster respectively. If the subcluster is in contact with the cluster at n points (Chirone et al., 1993) the overall elastic constant is $[nk]$ and the corresponding elastic force $\pm [nk](x - X)$;
- vii) the cluster and the subcluster behave like two damped, forced oscillators coupled to each other with natural frequency f_n .
- viii) fracture takes place when the absolute value of the elastic force $[nk](x - X)$ is larger than the cohesive frictional van der Waals force $n\mu F_{cw}$:

$$[nk] |x - X| \geq n\mu F_{cw} \quad (2)$$

The product $[nk](x - X)$ tends to detach the subcluster. nF_{cw} is the van der Waals force directed along straight lines throughout centres of a cluster and a subcluster. For each contact point van der Waals force is (Krupp, 1967):

$$F_{cw} = \frac{h\omega}{8\pi z_0^2} \left[1 + \frac{h\omega}{8\pi^2 z_0^3 H} \right] \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (3)$$

being $h\omega = 2$ eV the Lifshitz-van der Waals constant, $z_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ mm the distance between particles, $H = 10^8$ Pa the hardness of the material, and $r_1 \cong r_2$ the radii of curvature of asperities protruding at the surface of the particles. It gives place to frictional force $n\mu F_{cw}$ where μ is a static friction coefficient. This force, exerted in the direction opposite to $[nk](x - X)$, tends to keep subcluster in place.

The balances of forces acting on the cluster and on the subcluster are given by:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + C_{D_c} \frac{dX}{dt} - [n k] (x - X) = C_{D_c} U \sin (2 \pi f t) \quad (4)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c_{d_s} \frac{dx}{dt} + [n k] (x - X) = c_{d_s} U \sin (2 \pi f t) \quad (5)$$

being M and m the mass of the cluster and of the subcluster, respectively and f the frequency of the acoustic field. Eqs 4 and 5 take into account inertial, elastic and drag forces. $\left(U \sin (2 \pi f t) - \frac{dX}{dt} \right)$ and $\left(U \sin (2 \pi f t) - \frac{dx}{dt} \right)$ are the slip velocities between the gas and the cluster and the gas and the subcluster respectively. The terms $C_{D_c} \frac{dX}{dt}$ and $c_{d_s} \frac{dx}{dt}$, and $C_{D_c} U \sin (2 \pi f t)$ and $c_{d_s} U \sin (2 \pi f t)$ account for the damped and forced characteristics of the system respectively. If $C_{D_c} = c_{d_s} = 0$, it is:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} - [n k] (x - X) = 0 \quad (6)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + [n k] (x - X) = 0 \quad (7)$$

Equations 6 and 7, which are the balances of forces acting on the undamped, non forced oscillators corresponding to the damped, forced oscillators represented by eqs 4 and 5, give the natural frequency f_n of the two undamped non forced oscillators coupled to each other:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{[n k] \frac{m+M}{mM}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{[n k] \frac{d_s^3 + D_c^3}{(\pi/6) \rho d_s^3 D_c^3}} \quad (8)$$

Then, the overall elastic constant $[n k]$ is :

$$[n k] = (2\pi f_n)^2 \frac{mM}{m+M} = (2\pi f_n)^2 \frac{\pi}{6} \rho \frac{d_s^3 D_c^3}{d_s^3 + D_c^3} \quad (9)$$

which, substituted in eqs 2 and 4, gives:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + C_{D_c} \frac{dX}{dt} - (2\pi f_n)^2 \frac{mM}{m+M} (x - X) = C_{D_c} U \sin (2 \pi f t) \quad (10)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c_{d_s} \frac{dx}{dt} + (2\pi f_n)^2 \frac{mM}{m+M} (x - X) = c_{d_s} U \sin (2 \pi f t) \quad (11)$$

Integration of eqs. 10 and 11 yields the complex solutions (Bishop and Johnson 1960; Flugge W, 1962):

$$\underline{X}(t) = \underline{X}_B(t) - i \frac{m}{m+M} (M c_{d_s} - m C_{D_c}) (2\pi f)^2 \frac{U}{\Delta} e^{i(2\pi f)t} \quad (12)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_B(t) + i \frac{M}{m+M} (M c_{d_s} - m C_{D_c}) (2\pi f)^2 \frac{U}{\Delta} e^{i(2\pi f)t} \quad (13)$$

valid when $\Delta \neq 0$.

In eqs. 12 and 13, $\underline{X}_B(t)$ is the complex displacement of the baricenter of the system made by the two oscillators:

$$\underline{X}_B(t) = \frac{U}{\Delta} \{ (2\pi f) c_{d_s} C_{D_c} - i[f_n^2 - f^2] \frac{mM}{m+M} (2\pi)^2 (c_{d_s} + C_{D_c}) \} e^{i(2\pi f)t} \quad (14)$$

and Δ is the coefficient determinant of the homogeneous system corresponding to the eqs. 10 and 11:

$$\Delta = \left(-m(2\pi f)^2 + i(2\pi f) c_{d_s} + (2\pi f_n)^2 \frac{mM}{m+M} \right) \left(-M(2\pi f)^2 + i(2\pi f) C_{D_c} + (2\pi f_n)^2 \frac{mM}{m+M} \right) + \left((2\pi f_n)^2 \frac{mM}{m+M} \right)^2 \quad (15)$$

The real relative displacement $x(t) - X(t)$ between the subcluster and the cluster is:

$$\begin{aligned} x(t) - X(t) &= U \frac{f}{2\pi f_n^2} \frac{M c_{d_s} - m C_{D_c}}{mM} \cdot \left\{ (2\pi f)^2 \left(1 - \frac{f^2}{f_n^2} + \frac{c_{d_s} C_{D_c}}{mM(2\pi f_n)^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{c_{d_s} + C_{D_c}}{m+M} - \frac{f^2}{f_n^2} \frac{M c_{d_s} + m C_{D_c}}{mM} \right)^2 \right\}^{-1/2} \sin [(2\pi f)t + \phi] = \\ &= A(f) \sin [(2\pi f)t + \phi] \end{aligned} \quad (16)$$

where A is the amplitude of the relative displacement and ϕ is the phase lag between it and the velocity of gas:

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\left(\frac{c_d + C_D}{m + M} - \frac{f^2}{f_n^2} \frac{Mc_d + mC_D}{mM} \right)}{(2\pi f) \left(1 - \frac{f^2}{f_n^2} + \frac{c_d C_D}{mM (2\pi f_n)^2} \right)} \right] \quad (17)$$

The resonance frequency f_0 at which corresponds a peak of the $A(f)$ curve is calculated solving the equation:

$$\frac{dA(f)}{df} = 0 \quad (18)$$

according to standard procedure.

RESULTS OF CALCULATIONS

Amplitudes of elastic forces $[nk](x - X)$ are reported in Figs 3-6 as a function of the frequency of acoustic field. Elastic forces have been calculated for the case in which subcluster sizes d_s are 15, 30, 45 and 60 μm . Each figure gives, for a fixed subcluster size, elastic forces relative to five cluster sizes. The lower and the upper are $D_C = d_s$ and $D_C = \infty$. This latter condition corresponds to the case the cluster is stationary. Calculation are carried out assuming the density $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$; the overall elastic constant $[nk] = 1 \cdot 10^{-2} \text{ g/s}^2$ and the intensity of acoustic field $\text{SPL} = 150 \text{ dB}$.

Each of Figs. 3-6 consistently shows that, as expected, when $D_C = d_s$ elastic forces do not develop between clusters and subclusters. For fixed subcluster size, the increase of cluster size corresponds to an increase of elastic forces. These forces, however, levell off to the value relative to the limit condition $D_C = \infty$ when $D_C = 4d_s$.

As long as the system is made of two coupled oscillators ($D_C \neq \infty$), elastic forces vanish when sound frequency tends to zero. Eqs 4 and 5 degenerate into those representing the damped, free oscillations of the two coupled oscillators in this case. When the system reduces to a single

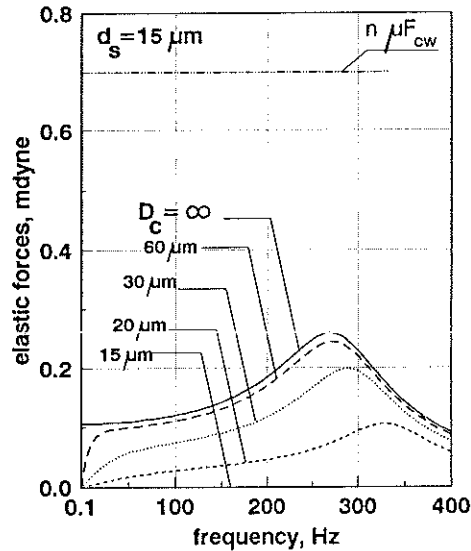


Fig.3-Cluster-subcluster model. Elastic forces vs frequency for $d_s = 15 \mu\text{m}$ and different cluster sizes.

oscillator ($D_c = \infty$), the value of elastic force at $f = 0$ is related to the static deflection of the subcluster under the effect of the drag force induced by a non oscillating gas velocity U .

Comparison between Figg 3-6 further shows that when changing cluster and subcluster sizes there is a variation in the resonance frequency of the coupled oscillators as well as in the maximum value of elastic force. The increase of both cluster and subcluster sizes from Fig.3 to Fig.6 decreases the frequency of resonance of the system and increases the elastic force respectively.

A comparison between the elastic forces $[nk](x - X)$ and the internal cohesive forces $n\mu F_{cw}$ is given in Figg 3-6. Values of $n = 3$, $\mu = 0.5$ and $r_1 = r_2 = 0.15 \mu m$ are used in the calculation of $n\mu F_{cw}$. The relative position between the horizontal line corresponding to the cohesive force $n\mu F_{cw}$ and the maximum value of the curves of elastic forces indicates the occurrence of detachment of the subcluster from the cluster. Figure 3 shows that subclusters $15\mu m$ size, or smaller, do not detach whatever the size of the cluster. Subclusters $30\mu m$ size just detach when $D_c = \infty$ (Fig.4). Subclusters $45\mu m$ detach from clusters when $D_c = 90\mu m$ or more, but do not detach when $D_c = 60\mu m$

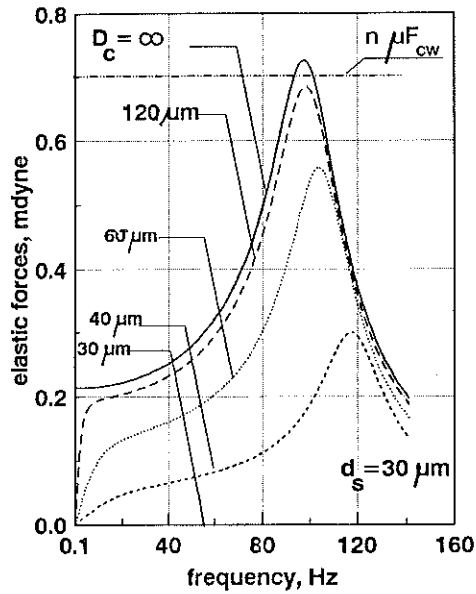


Fig.4-Cluster-subcluster model. Elastic forces vs frequency for $d_s = 30\mu m$ and different cluster sizes.

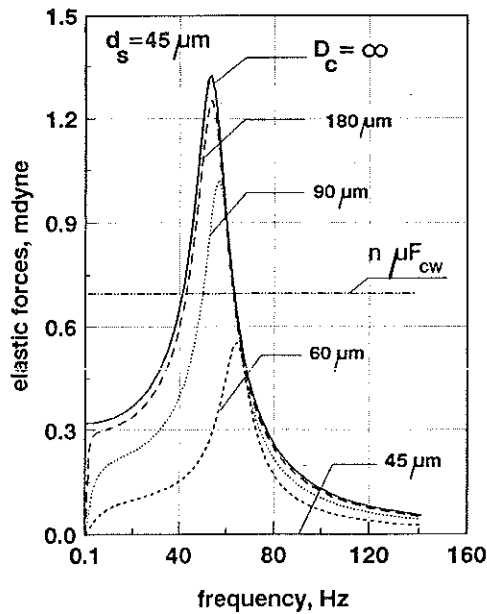


Fig.5-Cluster-subcluster model. Elastic forces vs frequency for $d_s = 45\mu m$ and different cluster sizes.

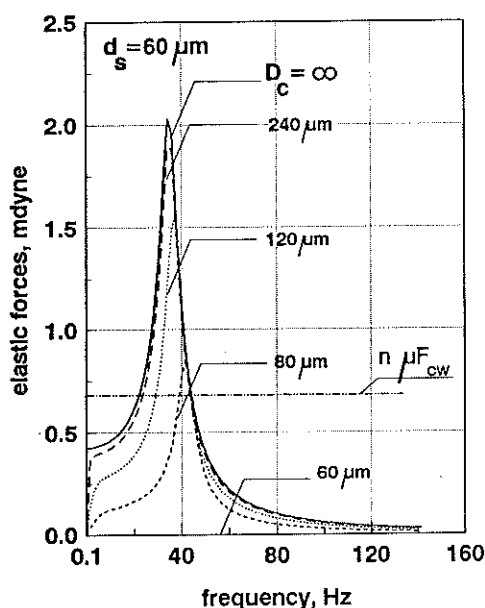


Fig.6-Cluster-subcluster model. Elastic forces vs frequency for $d_s=60\mu\text{m}$ and different cluster sizes.

(Fig.5). Subclusters $60\mu\text{m}$ size detach from clusters $D_c = 80\mu\text{m}$ or more.

NOMENCLATURE

A maximum value of the relative displacement of oscillating cluster and subcluster, cm

C_{D_c} ; c_{d_s} drag force acting on the cluster and on the subcluster per unit gas velocity, g/s

D_c cluster size, cm

d_s subcluster size, cm

f sound frequency, 1/s

F_{cw} cohesive van der Waals forces, g cm/s²

f_n natural frequency, 1/s

f_o resonance frequency, 1/s

k elastic constant, g/s²

M, m mass of the cluster and of the subcluster, g

n number of contact points per subcluster. --

r_1, r_2 radii of asperities, cm

SPL sound pressure level, dB

t time, s

U maximum value of oscillating gas velocity associated with the acoustic field, cm/s

u_o superficial fluidizing gas velocity, cm/s

X, x cluster and subcluster displacement, cm

Greek Symbols

ϕ phase lag between the velocity of gas and the relative displacement of the cluster and the subcluster, rad

μ static friction factor, --

ν	kinematic viscosity of gas, cm^2/s
ρ	cluster and subcluster density, g/cm^3
ρ_g	density of gas, g/cm^3

REFERENCES

- Bishop R.E.D. and Johnson D.C., 1960, *The Mechanics of Vibration*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Chirone R., Massimilla L. and Russo S., 1993, *Bubble-Free Fluidization of a Cohesive Powder in an Acoustic Field*, Chem. Engng. Science, **48** No.1 41.
- Flugge W., 1962, *Handbook of Engineering Mechanics*, McGraw Hill Book Company, New York.
- Geldart D., 1973, Powder Technol., **7** 285.
- Krupp H., 1967, Adv. Colloid and Interface Sci., **1** 111.
- Russo P., Chirone R., Massimilla L., Russo S., 1993, *The influence of the frequency of acoustic waves on sound assisted fluidization of beds of fine*, IRC/CNR Naples, Internal Report.

**SUI SISTEMI LINEARI DI FORME
LA CUI JACOBIANA HA DIMENSIONE IRREGOLARE**

Nota di Lora Di Fiore e di Sveva Freni
Presentata dal Socio Prof. Alfredo Franchetta
Adunanza del 6 marzo 1993

Riassunto. Si estendono ai sistemi lineari di forme di ordine $n > 2$ a jacobiana indeterminata di $\mathbf{P}_r(\mathcal{C})$ alcuni risultati noti per $n = 2$ e si determinano i sistemi lineari di quadriche di $\mathbf{P}_r(\mathcal{C})$ di dimensione massima aventi la jacobiana di dimensione assegnata.

Abstract. We extend, to linear systems of forms of $\mathbf{P}_r(\mathcal{C})$ that have order $n > 2$ and indeterminate Jacobian, some results known for $n = 2$ and describe linear systems of quadrics of maximal dimension with preassigned dimension of Jacobian variety.

Key words: Linear systems of forms, indeterminate Jacobian,
Jacobian with irregular dimension.

I risultati noti sui sistemi lineari di forme di $\mathbf{P}_r(\mathcal{C})$ aventi la varietà jacobiana di dimensione irregolare riguardano, in prevalenza, i sistemi lineari di quadriche e, più in particolare, quelli aventi la jacobiana indeterminata, la cui caratterizzazione costituisce un problema di particolare rilevanza, anche al di fuori dell'ambito della geometria algebrica, per il legame, messo in luce da A. Terracini [12], che esso ha col problema della caratterizzazione delle varietà V_k di $\mathbf{P}_r(\mathcal{C})$ ($r > 2k$) per le quali la varietà luogo dei $\mathbf{P}_k$ tangenti ha dimensione minore di $2k$. Tra i lavori che recano contributi al riguardo ricordiamo, oltre alla nota [12] di Terracini, il lavoro [5] di C.E. Bonferroni, nel quale sono determinati tutti i sistemi lineari di quadriche di $\mathbf{P}_3(\mathcal{C})$ aventi varietà jacobiana di dimensione irregolare, il lavoro [10] di L. Muracchini, in

cui sono determinati, tra l'altro, i sistemi lineari di quadriche di $\mathbf{P}_4(\mathcal{C})$ a jacobiana indeterminata e, inoltre, i lavori [2] [3] [4] di P. Bonera e [6] [7] [8] di L. Degoli. Per quanto riguarda i sistemi lineari di forme di ordine $n > 2$, ricordiamo la nota [9] di A. Di Sante, nella quale sono determinati i sistemi lineari di superfici cubiche di $\mathbf{P}_3(\mathcal{C})$ a jacobiana indeterminata.

In una prima parte di questa nota, comprendente i nn. 2, 3 si estendono ai sistemi lineari di forme d'ordine $n > 2$ di $\mathbf{P}_r(\mathcal{C})$ alcuni dei risultati relativi ai sistemi lineari di quadriche contenuti nei lavori citati. Nel n. 4 si determina un limite superiore per la dimensione dei sistemi lineari di forme la cui jacobiana ha dimensione positiva assegnata. I seguenti nn. 5, 6 e 7 riguardano i sistemi lineari di quadriche di $\mathbf{P}_r(\mathcal{C})$ a jacobiana di dimensione irregolare. Si determinano, tra l'altro, quelli di dimensione massima che hanno la varietà jacobiana di dimensione assegnata.

1. Sia Σ il sistema lineare, di dimensione d , di forme, di ordine n ($n > 1$), dello spazio $\mathbf{P}_r(\mathcal{C})$ ($r > 1$), (che nel seguito sarà indicato semplicemente con $\mathbf{P}_r$), generato dalle $d + 1$ ipersuperfici $f_0, \dots, f_d$ di equazioni $f_0 = 0, \dots, f_d = 0$.

Indicheremo con $\Sigma_x, \Sigma_{x^2} \dots$ il sistema delle forme di Σ passanti semplicemente, doppiamente $\dots$, per il punto x di $\mathbf{P}_r$. Più in generale, se φ è una varietà di $\mathbf{P}_r$, indicheremo con $\Sigma_\varphi, \Sigma_{\varphi^2}, \dots$ il sistema delle forme di Σ che passano semplicemente, doppiamente, $\dots$ per ogni punto di φ .

Denoteremo poi con Σ^π il sistema di forme segato da Σ su uno spazio π e con Δ_r^n la dimensione del sistema di tutte le forme d'ordine n di $\mathbf{P}_r$, porremo cioè

$$\Delta_r^n = \binom{r+n}{n} - 1.$$

La matrice jacobiana delle forme $f_0, \dots, f_d$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad (i = 0, \dots, d; j = 0, \dots, r)$$

sarà detta matrice jacobiana del sistema Σ e indicata con $J(\Sigma)$ o semplicemente con J , quando non vi sia possibilità di equivoci.

Indicheremo con p_x il rango di J nel punto x e con p il rango massimo di J , coincidente col rango di J nel punto generico x di $\mathbf{P}_r$, che sarà detto talvolta rango di J .

La varietà jacobiana di Σ è il luogo dei punti x nei quali J è nulla, ossia ha tutti i suoi minori d'ordine massimo nulli. Con abuso di notazione, la varietà jacobiana sarà indicata ancora con J ; diremo anche, talvolta, che p è il rango della varietà jacobiana. Ricordiamo, inoltre, che la varietà jacobiana si dice indeterminata se la matrice jacobiana J è identicamente nulla, ossia se la varietà jacobiana J coincide con $\mathbf{P}_r$.

Richiameremo ora alcune proprietà della varietà jacobiana di un sistema lineare di forme, che saranno spesso utilizzate nel seguito, raccogliendole nelle proposizioni seguenti. Per esse cfr., ad esempio, E. Bertini [1], B. Segre [11].

Prop. 1.1 Se $d \leq r$

- a) J ha dimensione $D \geq d - 1$. (Se $D > d - 1$, J è detta irregolare o sovrabbondante).
- b) J è il luogo dei punti x di $\mathbf{P}_r$ tali che il sistema Σ_{x^2} non sia vuoto.
- c) Se x è un punto di J si ha $p_x = d - h$ se e solo se $\dim \Sigma_{x^2} = h$ ($h \geq 0$).
- d) Se $d < r$ e x non è un punto base di Σ , x appartiene a J se e solo se le forme di Σ_x sono tangenti ad un $\mathbf{P}_{r-d+1}$ per x . Risulta $p_x = d - h$ se e solo se le forme di Σ_x sono tangenti ad un $\mathbf{P}_{r-d+h+1}$ per x e non ad uno spazio di dimensione superiore.

Prop. 1.2 Se $d \geq r$

- a) J ha dimensione $D \geq 2r - d - 1$. (Se risulta $D > 2r - d - 1$, J è detta irregolare o sovrabbondante).
- b) J è il luogo dei punti x di $\mathbf{P}_r$ tali che $\dim \Sigma_{x^2} \geq d - r$.
- c) Se x è un punto di J si ha $p_x = r - h$ se e solo se $\dim \Sigma_{x^2} = d - r + h$.
- d) Se x non è punto base di Σ , x appartiene a J se e solo se le forme di Σ_x sono tangenti ad una retta per x . Risulta $p_x = r - h$ se e solo se le forme di Σ_x sono tangenti ad un $\mathbf{P}_{h+1}$ per x e non ad uno spazio di dimensione superiore.

Il sistema Σ si dice composto con una congruenza di indice (o di ordine) 1 W di varietà V_h (o involuzione di specie h) se le forme di Σ passanti per un punto generico x di $\mathbf{P}_r$ passano per la varietà $V_h(x)$ di W passante per il punto x .

Vale, in proposito, la seguente proposizione

Prop. 1.3 Se $d \geq r$, J è indeterminata se e solo se Σ è composto con un'involuzione di specie $h > 0$ e risulta $p = r - k$ se, e solo se, $h = k + 1$. Se $d < r$, Σ è sempre composto con un'involuzione di specie $h > 0$ e J è indeterminata, con $p = d - k$, se e solo se Σ è composto con un'involuzione di specie $h = r - d + k + 1$.

2. In questo numero estendiamo ai sistemi lineari di forme di ordine $n > 2$ di $\mathbf{P}_r$, alcune proprietà dimostrate per $n = 2$, con argomentazioni attinenti alla teoria delle quadriche, da Terracini [12] e Muracchini [10].

Teorema 2.1 Se Σ è un sistema lineare di forme di ordine $n(n > 1)$ di $\mathbf{P}_r(r > 2)$, di dimensione $d \geq r$, a matrice jacobiana identicamente nulla di rango $p = r + 1 - h(h \geq 1)$, e π è l'iperpiano generico di $\mathbf{P}_r$, si ha che:

- a) Σ^π ha ancora dimensione d ;
- b) se $h > 1$ la matrice jacobiana di Σ^π è identicamente nulla di rango $p = r + 1 - h$;
- c) se $h = 1$ e Σ non è un sistema di $\mathbf{P}_0$ -coni col vertice in comune, la varietà jacobiana di Σ^π ha dimensione $r - 2$ (risultando così irregolare);
- d) $d \leq \Delta_{r-h}^n$.

Dimostrazione:

a) Iniziamo con l'osservare che, nelle ipotesi fatte, nessuna forma di Σ può contenere l'iperpiano generico π di $\mathbf{P}_r$. Supponiamo, infatti, per assurdo, che esista una forma F di Σ contenente π . Essa non può ridursi a π contato n volte, perché in tal caso Σ , contenendo tutti gli iperpiani contati n volte, sarebbe il sistema di tutte le forme d'ordine n di $\mathbf{P}_r$. La F sarà dunque costituita da π , contato eventualmente più volte, e da una forma residua $\overline{F}$, che interseca π in una ipersuperficie F' di π . Per la Prop. 1.3, Σ risulta composto con una congruenza di ordine 1 di V_h . Gli eventuali punti P di π per i quali $V_h(P)$ appartiene a π formano una varietà F'' , propriamente subordinata a π . Sia ora $\overline{P}$ un punto di π esterno a F' e F'' . Si ha che $V_h(\overline{P})$ appartiene a F , ma non appartiene né a $\overline{F}$, né a π e ciò è assurdo. Per quanto osservato, il sistema Σ^π ha ancora dimensione d .

b) Detto P il punto generico di π , il sistema Σ_P sega su π un sistema Σ_P^π costituito dalle forme di Σ^π passanti per P . Se $h > 1$, la varietà $V_h(P)$ è segata da π

in una varietà $V'_{h-1}(P)$, passante per P e comune a tutte le forme di Σ^π . Il sistema Σ^π risulta quindi composto con una involuzione di specie $h-1 > 0$ e per la Prop. 1.3 è a matrice jacobiana identicamente nulla di rango $r-h+1$.

c) Essendo $h=1$, il sistema Σ è composto con una congruenza di ordine 1 di curve. Se la varietà jacobiana di Σ^π fosse indeterminata, Σ^π sarebbe composto con una involuzione di specie $h \geq 1$, per cui le forme di Σ^π , e quindi anche quelle Σ_P , passerebbero per una varietà $V'(P)$ contenuta in π , e ciò è assurdo per la genericità di π e di P . Ne segue che, per $h=1$, la jacobiana di Σ^π non è indeterminata.

Supponiamo ora che Σ non sia un sistema di $\mathbf{P}_0$ -coni con il vertice in comune e siano s la retta generica di π e F la superficie rigata, luogo della tangente t_P alla curva $V_1(P)$ nel punto P variabile su s .

Supponiamo dapprima che F sia un piano: le rette t_P relative ai punti di s s'intersecano a due a due e, poiché ciò è vero per ogni retta di π , le rette t_P relative a tutti i punti di π s'intersecano a due a due per cui o appartengono tutte ad uno stesso piano, il che è assurdo, o passano tutte per uno stesso punto O_π .

Il punto O_π è indipendente da π perché se i punti O_{π_1} e O_{π_2} , relativi a due iperpiani distinti π_1 e π_2 , fossero distinti, le rette t_P relative ai punti dello spazio $\mathbf{P}_{r-2}$, intersezione di π_1 con π_2 , si ridurrebbero tutte alla retta $O_{\pi_1} O_{\pi_2}$. Ne segue che le rette t_P passano per uno stesso punto O , le curve $V_1(P)$ sono le stesse rette t_P e le ipersuperfici di Σ sono coni di vertice O , contro l'ipotesi.

La superficie F dunque non si riduce ad un piano e l'intersezione di F con π non è costituita dalla sola retta s . Indichiamo allora con A un punto dell'intersezione, fuori di s . Il punto A appartiene alla tangente t_P a $V_1(P)$ in un punto P di s e quindi $t_P = PA$ appartiene a π . Sulla retta s quindi c'è almeno un punto P tale che la curva $V_1(P)$ è tangente a π in P . Sia Γ il luogo dei punti P di π tali che la curva $V_1(P)$ sia tangente a π in P . Poiché ogni retta di π interseca Γ , questa varietà contiene un'ipersuperficie di π . D'altra parte, per la Prop. 1.2, d), Γ appartiene alla varietà jacobiana J' di Σ^π in quanto le forme di Σ^π_P sono tangenti a t_P . Ne segue che J' ha dimensione $r-2$.

d) Osserviamo infine che Σ^π è un sistema, ancora di dimensione d , di ipersuperfici di ordine n di π e quindi d non può superare la dimensione del sistema di tutte le forme di ordine n di un $\mathbf{P}_{r-1}$. Risulta dunque

$$d \leq \Delta_{r-1}^n.$$

Se vale il segno di uguaglianza Σ^π è il sistema di tutte le forme di ordine n di π e quindi, per quanto dimostrato, se $h=1$, Σ è un sistema di $\mathbf{P}_0$ -coni con lo stesso

vertice. Se invece è $h > 1$, iterando $h - 1$ volte l'operazione di sezione con un iperpiano, si ottiene un sistema $\bar{\Sigma}$, ancora di dimensione d , di forme di un $\mathbf{P}_{r-(h-1)}$ composto con una congruenza di ordine 1 di curve a varietà jacobiana indeterminata di rango $p = r + 1 - h$. Segando ancora $\bar{\Sigma}$ con un iperpiano α dello $\mathbf{P}_{r-h+1}$ otteniamo un sistema $\bar{\Sigma}^\alpha$ di forme di ordine n di α che non è a jacobiana indeterminata, ma ha ancora dimensione d . Risulta quindi

$$d \leq \Delta_{r-h}^n.$$

Osserviamo esplicitamente che dal teor.2.1 a) segue la

Prop. 2.1 *Se Σ ha jacobiana indeterminata si ha $d \leq \Delta_{r-1}^n$.*

Dimostrazione: Se fosse

$$d > \Delta_{r-1}^n$$

si potrebbe staccare da Σ l'iperpiano generico, il che, come si è visto, è impossibile.

3. Al fine di dare l'estensione ai sistemi di forme d'ordine n qualsiasi di una proprietà dei sistemi lineari di quadriche dimostrata da Bonera in [2] (sotto ipotesi restrittive di cui non è ben chiaro il significato geometrico), risulta utile premettere una proposizione sostanzialmente contenuta nel lavoro citato di Di Sante. Ne daremo una dimostrazione che semplifica quella proposta da Di Sante, pur utilizzandone l'idea base.

Prop. 3.1 *Sia Σ un sistema lineare di forme di $\mathbf{P}_r$, composto con una congruenza di ordine 1 W di varietà V_h . Se P è un punto di $\mathbf{P}_r$ per cui passa una sola varietà $V_h(P)$, e questa ha in P un punto semplice, ogni forma di Σ che ha molteplicità ρ in P ha molteplicità almeno ρ in tutti i punti di $V_h(P)$.*

Dimostrazione: Basta considerare il caso $h = 1$: ogni altro caso può essere ricondotto a questo segando con uno spazio di dimensione opportuna.

Nelle ipotesi dell'enunciato, indichiamo con A il punto generico di $V_1(P)$ e con s la retta generica per A . Consideriamo la superficie Φ luogo delle curve V_1 relative ai punti di s . Ogni forma di Σ sega Φ in un gruppo di curve di W . Sia F una forma di Σ avente in P punto ρ -plo. Essa sega Φ in una curva C che ha in P un punto almeno ρ -plo. Ne segue che $V_1(P)$ è componente almeno ρ -pla di C e quindi che C ha punto almeno ρ -plo anche in A . La retta s ha pertanto molteplicità d'intersezione almeno ρ in A con C e quindi anche con F . Per la genericità di A e di s si può concludere che F ha molteplicità almeno ρ in tutti i punti di $V_1(P)$.

L'estensione della proposizione di Bonera è espressa dal seguente

Teorema 3.1 *Se Σ è un sistema lineare di forme di $\mathbf{P}_r$, di ordine $n > 1$ e di dimensione $d \geq r$, a jacobiana indeterminata, ogni sistema lineare σ , di dimensione $r - 1$, subordinato a Σ , ha jacobiana irregolare (cioè di dimensione maggiore di $r - 2$).*

Dimostrazione: Sia $\bar{\Sigma}$ un sistema lineare di dimensione r subordinato a Σ e contenente σ . Se $p = r + 1 - h$ ($h \geq 1$), Σ è composto con una congruenza W di varietà V_h . Anche $\bar{\Sigma}$ è composto con W e quindi ha matrice jacobiana identicamente nulla di rango $\bar{p} = r + 1 - \bar{h}$, con $\bar{h} \geq h$. Basta quindi dimostrare l'asserto nelle ipotesi $d = r$ e $p = r + 1 - h$ ($h \geq 1$).

Indichiamo con $\tilde{\mathbf{P}}_r$ lo spazio rappresentativo di Σ e con $\tilde{\pi}$ l'iperpiano di $\tilde{\mathbf{P}}_r$ rappresentativo di σ . Detto P il punto generico di $\mathbf{P}_r$, si ha che Σ_P ha dimensione $h - 1$ per la Prop. 1.2, c).

Indichiamo con $\tilde{\mathbf{P}}_{h-1}$ lo spazio che lo rappresenta in $\tilde{\mathbf{P}}_r$. Se $h > 1$ tale spazio ha dei punti comuni con l'iperpiano $\tilde{\pi}$ e ciascuno di essi rappresenta una forma F di σ che ha punto doppio in P . Ne segue che la jacobiana J di σ , luogo dei punti che sono doppi per qualche forma di σ , invade tutto lo spazio $\mathbf{P}_r$.

Supponiamo ora $h = 1$. In questa ipotesi, per le Prop. 1.2, c) e 1.3, Σ è composto con una congruenza di ordine 1 di curve ed esiste un'unica forma $F(P)$ di Σ avente in P punto doppio. Per la Prop. 3.1, $F(P)$ contiene doppiamente la curva $V_1(P)$ della congruenza, ma può anche possedere una varietà doppia per P di dimensione maggiore di 1. Indichiamo con $T_k(P)$ ($k \geq 1$) la componente della varietà doppia di $F(P)$ che contiene P e quindi $V_1(P)$. Essa varia in una congruenza Θ . Al variare di P , $F(P)$ descrive un sistema algebrico di dimensione $r - k$, in corrispondenza generalmente biunivoca algebrica con Θ , rappresentato in $\tilde{\mathbf{P}}_r$ da una varietà $\tilde{V}_{r-k}$.

Se essa fa parte di $\tilde{\pi}$ il luogo dei punti P di $\mathbf{P}_r$ per cui esiste una forma di σ avente in P punto doppio invade tutto lo spazio.

Se $\tilde{V}_{r-k}$ non è contenuta in $\tilde{\pi}$, la $\tilde{V}_{r-k}$ interseca $\tilde{\pi}$ in una varietà $\tilde{V}_{r-k-1}$ e il luogo dei punti doppi delle forme di σ , costituente J , contenendo le varietà di Θ corrispondenti ai punti di $\tilde{V}_{r-k-1}$, ha dimensione $r - 1$.

4. Esponiamo ora un teorema con cui si determina una limitazione superiore per la dimensione d di un sistema lineare Σ di forme di ordine $n \geq 2$ che possieda una varietà jacobiana di dimensione positiva assegnata D .

Teorema 4.1 *Se $0 < D \leq r$ risulta*

$$d \leq \Delta_r^{n-2} + \Delta_{r-1}^{n-1} + \Delta_{r-1}^n - \Delta_{D-1}^{n-1} . \quad (1)$$

Dimostrazione: Osserviamo anzitutto che la (1) è vera se $D = r$, ossia se la jacobiana J di Σ è indeterminata. In tal caso infatti la (1) si riduce a

$$d \leq \Delta_r^{n-2} + \Delta_{r-1}^n \quad (2)$$

che è senz'altro soddisfatta, per la Prop. 2.1.

Sia ora $0 < D < r$ e supponiamo, per assurdo, che non valga la (1), cioè che sia

$$d \geq \Delta_r^{n-2} + \Delta_{r-1}^{n-1} + \Delta_{r-1}^n - \Delta_{D-1}^{n-1} + 1 . \quad (3)$$

Tenuto conto che

$$\Delta_{D-1}^{n-1} < \Delta_{r-1}^{n-1} \quad (4)$$

e quindi che

$$\Delta_r^{n-2} + \Delta_{r-1}^{n-1} - \Delta_{D-1}^{n-1} > 0 ,$$

dalla (3) segue

$$d > \Delta_{r-1}^n + 1$$

e pertanto dal sistema Σ si può staccare l'iperpiano π generico e per la dimensione d_1 del sistema residuo Σ_1 si ha

$$d_1 \geq d - \Delta_{r-1}^n - 1 > 0 . \quad (5)$$

Per la (5) resta escluso che π possa essere componente fissa delle forme di Σ_1 . Infatti, in tale caso, se $n = 2$ dovrebbe essere $d_1 = 0$, in contraddizione con la (5). Se $n > 2$ e π è componente fissa delle forme di Σ_1 la forma residua F è d'ordine $n - 2$ e nei punti della sua sezione con J è soggetta a delle condizioni, per cui si ha

$$d_1 < \Delta_r^{n-2} .$$

Da questa relazione e dalla (5) segue la (2) e quindi, per la (4), la (1), in contraddizione con la (3), ammessa come ipotesi.

Pertanto si può considerare il sistema $\Sigma_2 = \Sigma_1^\pi$ segato da Σ_1 su π .

Indichiamo con V_D una componente irriducibile di dimensione D di J e con v_{D-1} la sua sezione con π . Le forme di Σ_1 , e quindi anche quelle di Σ_2 , passano per v_{D-1} . Infatti, se P è il punto generico di v_{D-1} , le forme di Σ per P sono tangenti in P a uno spazio lineare per P (Prop. 1.2, d) non appartenente a π e quindi le forme di Σ_P spezzate in π e in una forma di Σ_1 hanno in P un punto doppio, il che implica appunto che la forma di Σ_1 passa per P . Il sistema Σ_2 è dunque subordinato al sistema di tutte le forme d'ordine $n-1$ di π passanti per v_{D-1} , sicché, dette d_2 e d' le dimensioni dei due sistemi, si ha

$$d_2 \leq d' . \quad (6)$$

Ma risulta

$$d' \leq \Delta_{r-1}^{n-1} - \Delta_{D-1}^{n-1} - 1 \quad (7)$$

in quanto l'espressione a secondo membro è la dimensione del sistema delle forme d'ordine $n-1$ di π che passano per uno spazio lineare di dimensione $D-1$ e il numero delle condizioni che uno spazio lineare impone alle forme di un dato ordine che devono contenerlo è minimo rispetto a quelle imposte da una varietà della stessa dimensione. Dalle (6) e (7) segue

$$d_2 \leq \Delta_{r-1}^{n-1} - \Delta_{D-1}^{n-1} - 1 . \quad (8)$$

Per la (8), π si stacca da Σ_1 con

$$d_2 + 1 \leq \Delta_{r-1}^{n-1} - \Delta_{D-1}^{n-1} \quad (9)$$

condizioni, al più. Si ha dunque, per la (5), che la dimensione d_3 del sistema residuo Σ_3 , costituito da forme d'ordine $n-2$, soddisfa la relazione

$$d_3 \geq d - \Delta_{r-1}^n - \Delta_{r-1}^{n-1} + \Delta_{D-1}^{n-1} - 1 .$$

Risulta inoltre

$$d_3 < \Delta_r^{n-2} .$$

Infatti, se $n = 2$, $d_3 = -1$ e $\Delta_r^{n-2} = \Delta_r^0 = 0$, se $n > 2$, le forme di Σ_3 devono soddisfare a delle condizioni nei punti che hanno in comune con J .

Dalle due ultime relazioni segue la (1) in contraddizione con la (3) che è dunque assurda.

Vale pertanto l'asserto.

5. Nel seguito Σ indicherà sempre un sistema lineare di quadriche e, per semplicità di scrittura, si adopererà il simbolo Δ_r , anziché Δ_r^2 , per indicare la dimensione del sistema lineare costituito da tutte le quadriche di $\mathbf{P}_r$.

Ciò posto riprendiamo, per le quadriche, la questione trattata nel n.4. Il teorema 4.1 determina per la dimensione D della jacobiana di un sistema lineare di quadriche di $\mathbf{P}_r$ la limitazione

$$D < \Delta_r - d.$$

Questa limitazione può essere ritrovata come conseguenza (Corollario 5.2) del seguente teorema:

Teorema 5.1 *Se*

$$d = \Delta_r - h \quad (1 \leq h \leq r)$$

lo spazio d'appartenenza della sezione j di J con l'iperpiano generico π ha dimensione minore di $h - 1$.

Dimostrazione: Se J ha dimensione $D = 0$ e quindi è costituita soltanto da punti isolati, j è l'insieme vuoto, lo spazio d'appartenenza di j è l'insieme vuoto, di dimensione -1 , e l'asserto è banalmente vero.

Supponiamo dunque $D > 0$ e indichiamo con π l'iperpiano generico. Per ipotesi si ha

$$d = \Delta_r - h \geq \Delta_r - r = \Delta_{r-1} + 1$$

e pertanto π si può staccare da Σ . Sia S la stella di iperpiani residua la cui dimensione è almeno

$$d - \Delta_{r-1} - 1 = r - h$$

e quindi ha per centro uno spazio $\mathbf{P}_k$, con $k \leq h - 1$. Lo spazio $\mathbf{P}_k$ non può essere l'insieme vuoto né può appartenere all'iperpiano π perché, in questa ipotesi, π apparterrebbe ad S e l'iperpiano π , contato due volte, sarebbe una quadrica di Σ . Pertanto Σ sarebbe il sistema di tutte le quadriche di $\mathbf{P}_r$, mentre, per ipotesi, risulta $d < \Delta_r$. Si ha quindi che o $k = 0$ e $\mathbf{P}_k$ è un punto esterno a π o $k > 0$ e $\mathbf{P}_k$ interseca π in un $\mathbf{P}_{k-1}$, con $0 \leq k - 1 < h - 1$.

Sia P un punto dell'intersezione di J con π . Poiché P appartiene a J le quadriche di Σ_P o hanno in P un punto doppio o un punto semplice con uno spazio tangente fisso τ_P (Prop. 1.2). In particolare P è doppio per tutte le quadriche contenenti π perché, se fosse semplice per una di esse, τ_P dovrebbe appartenere a π ,

il che è assurdo essendo π generico. Ne segue che P appartiene a tutti gli iperpiani di S e quindi a $\mathbf{P}_{k-1}$. Questo implica che $\mathbf{P}_{k-1}$ non è vuoto e quindi $k \geq 1$ e che lo spazio d'appartenenza di j è contenuto in $\mathbf{P}_{k-1}$ per cui ha dimensione al più $k-1 < h-1$.

Per una varietà irriducibile accade che lo spazio d'appartenenza della sezione con l'iperpiano generico π è l'intersezione con π dello spazio d'appartenenza della varietà. Dal teorema dimostrato segue dunque il

Corollario 5.1

Se $d = \Delta_r - h$, con $1 \leq h \leq r$, J non può contenere varietà irriducibili aventi spazio di appartenenza di dimensione maggiore di $h-1$.

Dal corollario 5.1 segue senz'altro il

Corollario 5.2

Se $d = \Delta_r - h$, con $0 \leq h \leq r$, la jacobiana di Σ ha dimensione minore di h .

Corollario 5.3

Se $d = \Delta_r - h$, con $1 \leq h \leq r$ e la jacobiana J di Σ ha dimensione $h-1$, J è costituita da un $\mathbf{P}_{h-1}$ e da eventuali punti isolati.

Dimostrazione: La sezione di J con l'iperpiano generico ha dimensione $h-2$ che, per il Teorema 5.1, è la dimensione del suo spazio di appartenenza. Ne segue che la sezione è un $\mathbf{P}_{h-2}$ e quindi si ha, ovviamente, l'asserto.

Le proposizioni precedenti permettono di dare una dimostrazione diretta e assai semplice di un notevole risultato dovuto a Muracchini [10] del quale egli dà una dimostrazione per induzione.

Corollario 5.4

Se $r > 2$ e $\Delta_{r-2} + 1 < d < \Delta_{r-1} + 1$, J è indeterminata di rango r se e soltanto se Σ è un sistema di $\mathbf{P}_0$ -coni, con il vertice in comune.

Dimostrazione: Se, nelle ipotesi fatte, Σ non fosse formato da coni, il sistema Σ^π avrebbe, per il Teorema 2.1, dimensione d e varietà jacobiana di dimensione $r-2$, il che è assurdo. Infatti per il Corollario 5.2 un sistema lineare di quadriche di un $\mathbf{P}_{r-1}$ può avere jacobiana di dimensione $r-2$ solo se la sua dimensione d è minore di

$$\Delta_{r-1} - (r-2) = \Delta_{r-2} + 2 .$$

6. In questo numero Σ indica sempre un sistema lineare di quadriche di dimensione $d = \Delta_r - h$ ($2 \leq h \leq r$) la cui jacobiana ha dimensione $D = h - 1$.

Prop. 6.1 La quadrica generica di Σ non può contenere un P_{h-1} .

Dimostrazione: Le quadriche di P_r per un P_{h-1} formano un sistema lineare di dimensione

$$d' \equiv \Delta_r - \Delta_{h-1} - 1 = \Delta_r - \frac{h(h+1)}{2}.$$

Risulta quindi

$$d' < d = \Delta_r - h.$$

Prop. 6.2 Se P è il punto generico di una assegnata varietà V_t , con $t > 0$, la quadrica generica di Σ_P non può avere punto doppio in P .

Dimostrazione: La dimensione di Σ_P è

$$d - 1 = \Delta_r - h - 1,$$

quella del sistema delle quadriche di P_r aventi punto doppio in P è

$$\Delta_r - r - 1.$$

Se tutte le quadriche di Σ_P avessero punto doppio in P si avrebbe

$$\Delta_r - h - 1 \leq \Delta_r - r - 1$$

e quindi

$$h \geq r.$$

Essendo per ipotesi $h \leq r$ si ha

$$h = r.$$

Pertanto Σ_P coincide col sistema di tutte le quadriche di P_r aventi punto doppio in P e quindi contiene tutti gli iperpiani per P , contati due volte. Poiché ogni iperpiano interseca la V_t , Σ contiene tutti gli iperpiani di P_r , contati due volte. Ne segue che Σ è il sistema di tutte le quadriche di P_r , il che è assurdo essendo $d < \Delta_r$.

Prop. 6.3 Se $d = \Delta_r - h$ ($2 \leq h \leq r$) e P è il punto generico di una assegnata V_{h-1} le quadriche di Σ_P non possono essere tangenti in P ad uno stesso spazio τ_P , di dimensione $l > 1$.

Dimostrazione: Consideriamo dapprima il caso $h = 2$. Risulta $d = \Delta_r - 2$ e Σ_P ha dimensione

$$d' = \Delta_r - 3.$$

Le quadriche di $\mathbf{P}_r$ tangenti in P a τ_P formano un sistema $\bar{\Sigma}$ di dimensione

$$\bar{d} = \Delta_r - l - 1 .$$

Se le quadriche di Σ_P sono tangenti in P a τ_P , deve essere

$$d' \leq \bar{d}$$

e quindi $l \leq 2$.

Se fosse $l = 2$, Σ_P coinciderebbe con $\bar{\Sigma}$ e quindi conterrebbe tutti gli iperpiani per P , contati due volte. Poiché ogni iperpiano interseca la $V_{h-1} = V_1$ considerata, Σ conterrebbe tutti gli iperpiani di $\mathbf{P}_r$, contati due volte, e quindi coinciderebbe col sistema di tutte le quadriche di $\mathbf{P}_r$, contro l'ipotesi.

Supponiamo ora la proprietà vera per i sistemi lineari di quadriche di dimensione $\Delta_r - (h - 1)$ e proviamo che è ancora vera per i sistemi di dimensione $\Delta_r - h$.

Sia π l'iperpiano generico di $\mathbf{P}_r$ per P . La quadrica $(\pi)^2$, costituita da π contato due volte, non appartiene a Σ e pertanto il sistema lineare Σ^* ottenuto aggiungendo $(\pi)^2$ a Σ ha dimensione $d^* = \Delta_r - (h - 1)$. Se le quadriche di Σ_P fossero tutte tangenti in P ad uno stesso spazio τ_P , di dimensione $l > 1$, anche le quadriche di Σ_P^* sarebbero tutte tangenti in P a τ_P . Questo varrebbe per ogni punto della varietà V'_{h-2} intersezione di π con la V_{h-1} considerata e ciò è assurdo per l'ipotesi d'induzione.

Dalle proposizioni precedenti segue senz'altro la

Prop. 6.4 *Se Σ è un sistema lineare di quadriche di dimensione $d = \Delta_r - h$ ($2 \leq h \leq r$) e $\mathbf{P}_{h-1}$ è una componente della sua jacobiana J , le quadriche che passano per il generico punto P di $\mathbf{P}_{h-1}$ sono ivi tangenti ad una retta t_P , univocamente determinata.*

7. In questo numero si caratterizzano i sistemi lineari di quadriche di $\mathbf{P}_r$ di dimensione $d = \Delta_r - h$ ($2 \leq h \leq r$) le cui jacobiane contengono un $\mathbf{P}_{h-1}$. Per i Corollari 5.2 e 5.3 essi sono tutti e soli i sistemi lineari di quadriche di dimensione $d = \Delta_r - h$ la cui jacobiana ha dimensione massima.

Teorema 7.1 *Se $d = \Delta_r - 2$ (con $r \geq 2$) e la jacobiana contiene una retta t , Σ è di uno dei seguenti tipi:*

a) *sistema delle quadriche di $\mathbf{P}_r$ per due punti fissi di t ;*

b) sistema delle quadriche di P_r per le quali t è coniugata ad un punto fisso.

Dimostrazione: Sia P il punto generico di t . Per la Prop. 6.4 la quadrica generica di Σ_P è tangente propriamente ad una retta t_P per P , determinata in modo univoco.

Supponiamo dapprima che la retta t_P coincida con t . Per la Prop. 6.1 t non è parte fissa delle quadriche di Σ e quindi si può considerare la serie g_2 segata da Σ su t . Essa non può contenere un gruppo variabile, perché esso si ridurrebbe ad un punto doppio e il gruppo generico di g_2 sarebbe costituito da un punto doppio variabile, il che è assurdo per il teorema di Bertini. Ne segue che le quadriche di Σ che non contengono t segano su t una coppia di punti fissi, distinti o coincidenti, e le quadriche di Σ sono tutte e sole le quadriche di P_r per essi. Il sistema è del tipo a) e la jacobiana di Σ è costituita dalla sola retta t .

Supponiamo ora $t_P \neq t$ e procediamo per induzione su r .

Sia $r = 2$ e quindi $d = \Delta_2 - 2 = 3$. Le coniche del sistema Σ_P non possono contenere tutte la retta t_P . In tale ipotesi, infatti, la retta residua descriverebbe il sistema di tutte le rette del piano e per un punto generico Q di t passerebbero infinite di tali rette, mentre si sa che ne deve passare una soltanto: t_Q . Si ha dunque che t_P si stacca da Σ_P con una condizione e la retta residua varia in un fascio. Sia O il suo centro. Il punto O non appartiene alla retta t perché, in questo caso, la conica spezzata nelle due rette t e t_P apparterrebbe a Σ_P e t sarebbe tangente fissa alle coniche di Σ nel punto Q generico di t . O è pertanto esterno a t , la retta t_P passa per O e Σ è il sistema di tutte e sole le coniche del piano che hanno come polo della retta t il punto O . Dunque Σ è del tipo b) e la jacobiana di Σ è costituita da O e t .

Dimostriamo ora che il teorema è vero per i sistemi lineari di quadriche di P_r ($r > 2$) se è vero per i sistemi lineari di quadriche di P_{r-1} .

Fissiamo un punto A generico di t e sia π il generico iperpiano per il piano determinato da t e t_A . Σ sega su π un sistema Σ^π , di dimensione d' . Dimostriamo che per il sistema Σ^π sono verificate le ipotesi dell'enunciato e cioè che la varietà jacobiana J' di Σ^π contiene ancora come sua componente t e che $d' = \Delta_{r-1} - 2$.

Le quadriche Σ^π per il punto A fissato hanno ancora t_A come tangente comune in A .

Consideriamo il sistema Σ_π delle quadriche di Σ spezzate in π e in un altro iperpiano π' , variabile in una stella che indicheremo con S . Poiché le quadriche di

Σ_A sono tutte tangenti in A a t_A , che appartiene a π , per staccare π da Σ basta imporre al più Δ_{r-1} condizioni, sicché per la dimensione d_π di S si ha la relazione

$$d_\pi \geq d - \Delta_{r-1} = \Delta_r - 2 - \Delta_{r-1} = r - 1 .$$

Poiché il sistema degli iperpiani di $\mathbf{P}_r$ passanti per una retta ha dimensione $r - 2$, gli iperpiani di S non contengono tutti la retta t . Sia Q una quadrica di Σ_π spezzata in π e in un iperpiano π' , non passante per t . Il punto generico P di t è semplice per Q e quindi t_P appartiene a π . Ne segue che se π contiene la $t_{\bar{P}}$ relativa a un determinato punto generico $\bar{P}$, π contiene tutte le rette t_P , per P variabile su t . Di conseguenza, le quadriche di Σ^π per il punto generico P di t hanno ancora la retta t_P come tangente fissa, per cui t appartiene alla jacobiana J' di Σ^π .

Risulta ovviamente $d' = d - (d_\pi + 1)$ e, per il corollario 5.1, si ha $d' \leq \Delta_{r-1} - 2$.

Se fosse $d' < \Delta_{r-1} - 2$ risulterebbe $d - d_\pi - 1 < \Delta_{r-1} - 2$, ossia $\Delta_r - 2 - d_\pi - 1 < \Delta_r - r - 1 - 2$ da cui

$$d_\pi > r ,$$

il che è assurdo.

Si ha quindi $d' = \Delta_{r-1} - 2$ e, per l'ipotesi d'induzione, esiste un punto O di π tale che le quadriche Σ^π sono tutte e sole le quadriche di π rispetto alle quali la retta t è coniugata ad O . Ne segue che anche rispetto alle quadriche di Σ , t e O sono coniugati e, poiché la dimensione di Σ , $d = \Delta_r - 2$, è esattamente la dimensione del sistema di tutte le quadriche di un $\mathbf{P}_r$ aventi una retta fissata ed un punto fissato come coniugati, Σ è il sistema di tutte e sole le quadriche di $\mathbf{P}_r$ rispetto alle quali t e O sono coniugati.

Teorema 7.2 *Se $d = \Delta_r - h$ ($2 < h < r$) e la jacobiana J contiene uno spazio $\mathbf{P}_{h-1}$, di dimensione $h - 1$, Σ è il sistema delle quadriche di $\mathbf{P}_r$ rispetto alle quali lo spazio $\mathbf{P}_{h-1}$ è coniugato ad un punto fisso.*

Dimostrazione: Sia P un punto generico di $\mathbf{P}_{h-1}$. Possono verificarsi due casi: la retta t_P appartiene a $\mathbf{P}_{h-1}$ o la retta t_P non è contenuta in $\mathbf{P}_{h-1}$.

Supponiamo che t_P appartenga a $\mathbf{P}_{h-1}$.

Detto $\bar{\Sigma}$ il sistema segato da Σ su $\mathbf{P}_{h-1}$, $\bar{d}$ la sua dimensione e $\bar{J}$ la sua jacobiana, $\bar{J}$ risulta indeterminata. Per il Corollario 5.2 si ha

$$\bar{d} \leq \Delta_{h-1} - (h - 1) - 1 = \Delta_{h-1} - h = \Delta_{h-2} .$$

Indichiamo con Σ' il sistema delle quadriche di Σ passanti per il $\mathbf{P}_{h-1}$ e con $d' = d - (\bar{d} + 1)$ la sua dimensione. Essendo

$$\bar{d} \leq \Delta_{h-1} - h$$

risulta

$$d' = d - \bar{d} - 1 \geq \Delta_r - h - \Delta_{h-1} + h - 1 = \Delta_r - \Delta_{h-1} - 1.$$

Poiché la dimensione del sistema di tutte le quadriche di $\mathbf{P}_r$ passanti per lo spazio $\mathbf{P}_{h-1}$ è

$$\Delta_r - \Delta_{h-1} - 1$$

non può verificarsi $\bar{d} < \Delta_{h-2}$. Risulta quindi

$$\bar{d} = \Delta_{h-2}.$$

Per il Corollario 5.4, essendo $\bar{d} = \Delta_{h-2}$ e $\bar{J}$ identicamente nulla, $\bar{\Sigma}$ è il sistema dei coni aventi per vertice un punto O . Poiché il sistema Σ sega su $\mathbf{P}_{h-1}$ un sistema di coni di vertice O le quadriche di Σ sono tangenti in O a $\mathbf{P}_{h-1}$ e, essendo $d = \Delta_r - h$, Σ è il sistema di tutte e sole le quadriche di $\mathbf{P}_r$ tangenti in O a $\mathbf{P}_{h-1}$.

Supponiamo ora che la retta t_P non appartenga a $\mathbf{P}_{h-1}$ e dimostriamo l'asserto per $2 \leq h < r$.

Per le considerazioni fatte nella dimostrazione del Teorema 7.1, l'asserto è vero per $h = 2$. Possiamo dunque procedere per induzione su h supponendo il teorema vero per i sistemi lineari di quadriche di $\mathbf{P}_r$ di dimensione $\Delta_r - (h - 1)$ e dimostrando che esso è ancora vero per un sistema lineare di quadriche di $\mathbf{P}_r$ di dimensione $d = \Delta_r - h$.

Sia π un iperpiano generico per i punti generici A e B di $\mathbf{P}_{h-1}$. La quadrica $(\pi)^2$, costituita da π contato due volte, non appartiene a Σ e quindi il sistema Σ^* , ottenuto aggiungendo $(\pi)^2$ a Σ , ha dimensione $d^* = \Delta_r - (h - 1)$.

Lo spazio $\mathbf{P}_{h-2}$, di dimensione $h - 2$, intersezione di $\mathbf{P}_{h-1}$ con π , fa parte della jacobiana J^* di Σ^* .

Il sistema Σ^* quindi soddisfa le ipotesi dell'induzione ed esiste un punto O di $\mathbf{P}_r$, esterno a $\mathbf{P}_{h-2}$, tale che le quadriche di Σ^* siano tutte e sole le quadriche di $\mathbf{P}_r$ rispetto alle quali $\mathbf{P}_{h-2}$ e O risultano coniugati. Ne segue che le rette t_A e t_B s'intersecano nel punto O e che le rette t_P passano per uno stesso punto O esterno a $\mathbf{P}_{h-1}$. Il punto O è polo di $\mathbf{P}_{h-1}$ rispetto alle quadriche del sistema segnato da Σ sullo spazio congiungente O con $\mathbf{P}_{h-1}$ e quindi O e $\mathbf{P}_{h-1}$ sono coniugati rispetto alle quadriche di Σ .

BIBLIOGRAFIA

1. E. Bertini: "Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi". Pisa, Spoerri, 1907.
2. P. Bonera: "Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente", Nota I. Boll. U.M.I. Settembre 1966, Serie III, Anno XXI, N. 3.
3. P. Bonera: "Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente", Nota II. Boll. U.M.I. Dicembre 1966, Serie III, Anno XXI, N. 4.
4. P. Bonera: "Un teorema sui sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente e alcune sue applicazioni". Boll. U.M.I. Giugno 1967, Serie III, Anno XXII, N. 2.
5. C. Bonferroni: "Sui sistemi lineari di quadriche la cui jacobiana ha dimensione irregolare". R. Acc. Sc. Torino, Vol. 50, 1914-15.
6. L. Degoli: "Sui sistemi lineari di quadriche a jacobiana identicamente nulla di caratteristica $\leq r$ ". Rend. Acc. Sc. Bologna, Serie XI, Tomo X, 1963.
7. L. Degoli: "Un Théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à jacobienne indéterminée". Publication de l'Institut de Mathématique, Beograd, Tome 33 (47) (1983).
8. L. Degoli: "Alcuni teoremi sui sistemi lineari di quadriche a jacobiana identicamente nulla". Mathematica, Tomo 26 (49), n.1, 1984.
9. A. Di Sante: "Sui sistemi lineari di forme a jacobiana indeterminata". Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, Serie 4, Vol. XL, 1973.
10. L. Muracchini: "La varietà W i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria". Riv. Univ. Parma, Parte I (1951) e Parte II (1952).

11. B. Segre: "Prodromi di geometria algebrica". Cremonese, Roma, 1971.
12. A. Terracini: "Alcune questioni sugli spazi tangenti ed osculatori ad una varietà". Atti R. Accad. Sc. Torino (a) XLIX - Nota I (1913-14); (b) LI - Nota II (1916); (c) LV - Nota III (1919-20).

FIRST RESULTS ABOUT THE TIKHONOV REGULARIZATION METHODS FOR NUMERICALLY INVERTING A LAPLACE TRANSFORM FUNCTION

Nota di

A. d'Alessio[†], L. D'Amore*, G. Laccetti*

[†] Dipartimento di Informatica e Sistemistica - Università degli Studi di Napoli

* Dipartimento di Matematica ed Applicazioni - Università degli Studi di Napoli

presentata dal socio Guido Trombetti
adunanza del 3/4/1993

Riassunto

È ben noto che il problema dell'inversione reale di una trasformata di Laplace, è mal posto. I metodi di regolarizzazione consentono di trasformare tale problema in uno ben posto, la cui soluzione è una buona approssimazione della soluzione del problema originario. A tal fine il cosiddetto parametro di regolarizzazione svolge un ruolo cruciale.

In questo lavoro si presentano alcuni dei risultati ottenuti applicando la tecnica della Cross Validation per la stima automatica del valore ottimale del parametro di regolarizzazione.

Abstract

The real inversion of a Laplace Transform function is an ill-posed problem; so, in the design of a numerical method for inverting a Laplace Transform function when the function values are known on a subset of $\mathcal{R}$ only, it is of

fundamental importance to take into account the dependence of the solution on the perturbations, even if small, that affect the data. The regularization methods allow to transform that problem in a well-posed one, whose solution is a good approximation of that one of the original problem; a crucial role, of course, plays the choice of the so-called regularization parameter.

In this paper we discuss some results obtained by applying the Cross-Validation technique for the *automatic* estimate of the regularization parameter.

Key Words: Laplace Transform, Tikhonov regularization, Cross Validation.

1 Introduction

Let $f(t)$ be a function of $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{C}$, where $\mathbb{R}^+$ is the real positive number set and $\mathbb{C}$ is the complex number set.

If $f(t)$ is *Laplace-transformable*, let :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0, \quad (1.1)$$

be its Laplace Transform, with σ_0 abscissa of convergence of the Laplace integral [7].

Given $F(s)$, the problem of inverting the Laplace Transform consists in obtaining the function $f(t)$ for which (1.1) holds.

It is well known that the real inversion of a Laplace Transform function is an ill-posed problem, in the sense that, if we know some values of F on a subset of $\mathbb{R}$ only, the inverse operator of the Laplace integral operator is not continuous and then not bounded [10,15].

The *regularization methods* are a powerful way to transform the Laplace Transform real inversion problem in a well-posed problem [8,12,16].

The basic idea of a regularization method is to substitute the actual problem by a well-posed one, whose solution, under suitable

hypotheses, is a *good* approximation of that one of the original problem.

In our case, let

$$\mathcal{L} : f \rightarrow \mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

be the Laplace integral operator; let us consider the integral equation:

$$\mathcal{L}f = F ; \quad (1.2)$$

to *regularize* (1.2) means to transform the problem (1.2) into the minimum problem:

$$\min_{f \in \Omega} \|\mathcal{L}f - F\|^2 + \lambda \|Tf\|^2 , \quad (1.3)$$

where $\|\cdot\|$ is a vector norm, T is the regularizing operator, λ is the regularization parameter and Ω is the functions space where we seek for the approximate solution of 1.2.

In particular, if $T = D^m$ with D differentiating operator, we have a *Tikhonov regularization* of order m .

The regularization phase may occur after the discretization of (1.2); in such a case, we must study the ill-conditioning of the discretized problem, and it will need to verify how the regularization improves its conditioning.

Generally, one can prove that the Tikhonov regularization applied to an operator defined between the Sobolev space $W^{m,2}(\mathbb{R}^+)$ and the Lebesgue space $L^2(\mathbb{R}^+)$, produces a well-posed problem if and only if ¹:

$$N(\mathcal{L}) \cap N(T) = 0 , \quad (1.4)$$

¹The proof of this result is based on the *Tikhonov Theorem* which ensures the continuity of the inverse of a continuous and compact domain's operator; the hypothesis (1.4) guarantees the unicity of the solution.

where $N(\mathcal{L})$ is the nucleus of $\mathcal{L}$.

Let us denote by f_λ the solution of (1.3) obtained by using a specified value of the regularization parameter λ ; then the sequence $\{f_\lambda\}$ tends to the generalized solution in the sense of Moore-Penrose [8] of (1.2), as λ goes to zero.

We remark that in (1.3) the term $\|Tf\|$ deals with the regularity of the solution, and therefore it reduces the sensibility to the perturbations that affect the data. In the other hand, a function "too" regularized will be not, may be, a good approximation of the required solution.

The regularization parameter allow to manage both the regularity of the solution and its reliability. If λ is too small, the contribution of the regularizing operator is lost; on the contrary, a value of λ too large brings out a not sufficiently accurate solution, even if regular.

Then, an efficient implementation of a regularization method is mostly based on a suitable choice of the regularization parameter; only a *good* value of λ allows a compromise between regularity and reliability of the solution.

The choice of the *optimal* value of the regularization parameter is the crucial point of such a method.

In this paper we examine the Cross-Validation (CV) technique to *automatically* determining the *optimal* value of λ , in the context of the numerical inversion of the Laplace Transform by means of Tikhonov regularization methods.

In the following Section we briefly describe the CV technique; in Section 3, following the strategy to discretize before to regularize, we describe two discretization techniques and further the CV application. In Section 4, finally, we discuss some numerical results.

2 The Cross-Validation technique

The Cross Validation is one of the most effective techniques to determine the optimal value of the regularization parameter.

In this Section we report some results about the Cross Validation related to the problem (1.3). Such results are here specialized from more general ones proved in [13,17].

Let

$$y_i = F(s_i) + \epsilon_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad ,$$

be, where the errors ϵ_i are uniformly distributed and such that:

$$E\epsilon_i = 0 \quad , \quad E\epsilon_i\epsilon_j = \sigma^2\delta_{ij} \quad ,$$

where E is the mathematical expectation and σ^2 is the variance.

Let

$$T_y(\lambda) = \frac{1}{n} \sum (Af_{n,\lambda}(s_i) - F_i)^2 \quad ,$$

be, where $F_i = F(s_i)$, $f_{n,\lambda}$ is the vector of $\mathfrak{R}^n$, solution of the problem 1.3 for a specified value of λ , and A is a matrix obtained by discretization of the Laplace integral operator. We define the optimal value of λ as:

$$\lambda^{T_v} = \operatorname{argmin}_{\lambda} T_y(\lambda) \quad .$$

Let us denote by $f_{n,\lambda}^{(k)}$ the solution obtained by eliminating the k -th experiment, i.e. the k -th element of $(F_i)_{i=1,n}$; the (ordinary) Cross Validation produces as estimate for λ^{T_v} the minimum point of:

$$V_0(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_k (Af_{n,\lambda}^{(k)}(s_k) - y_k)^2 \quad . \quad (2.1)$$

Generally all the data are affected by some error, so it seems well founded to choose as optimal value of λ the λ^{ET_v} point, minimum point of $ET_y(\lambda)$, the expected value of the mean square error T_y .

In [17] the effectiveness of such a technique both in a theoretical and experimental way is proved, in the case of equispaced data and periodicity conditions on the solution function.

In a more general case (2.1) may be written:

$$V(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Af_{n,\lambda}^{(k)}(s_k) - y_k)^2 w_k ,$$

where the weights w_k reflect the non equidistribution of the data. Let $M(\lambda) = (m_{ij}(\lambda))$ be the influence matrix such that:

$$((Af_\lambda)(s_1), \dots, (Af_\lambda)(s_n))^T = M(\lambda)y ,$$

and let :

$$w_k = \left[\frac{(1 - m_{kk}(\lambda))}{\frac{1}{n} \text{Tr}(I - M)} \right]^2 ,$$

then:

$$V(\lambda) = \frac{\frac{1}{n} \|(I - M(\lambda))y\|^2}{\frac{1}{n} \text{Tr}(I - M(\lambda))^2} .$$

The *generalized Cross Validation* (GCV) chooses as estimate of λ^{ET_v} the minimum of $V(\lambda)$.

The following Theorem, derived by using a result in [13], justifies this choice for the optimal value of λ :

Theorem 2.1 *Let $f(t)$ be the inverse Laplace Transform of $F(s)$; if $f(t)$ belongs to $W^{m,2}(\mathbb{R}^+)$, it exists a sequence $\bar{\lambda}_n^{EV}$ of minima of $EV(\lambda)$ (the expected value of $V(\lambda)$) such that:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ET_y(\bar{\lambda}_n^{EV})}{ET_y(\bar{\lambda}_n^{ET_v})} = 1 ,$$

i.e. the expected value of the mean square error computed in $\bar{\lambda}_n^{EV}$ goes to the minimum of the expected value of the mean square error ET_y .

3 Applying the Cross Validation

A first, straightforward implementation of the CV technique has been realized just to verify the effectiveness of this technique.

In our experiments we first discretize the problem (1.2) and then we apply the regularization process.

There are several discretization techniques in literature [5,9,14]; in this paper we consider two different schemes: the first one based on a *full* discretization by means of finite differences; the other one based on a *partial* discretization: in this latter case we choose B-splines functions as basis functions.

In the sequel of this Section we briefly describe these techniques.

3.1 Technique I

Let us consider the Laplace integral operator:

$$\mathcal{L}f = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) ,$$

as operator in C_{0K} to L^2 , where:

$$C_{0K} = \{f \in C[0, K] : \text{supp } f \subseteq [0, K]\} ,$$
$$\text{with } K > 0 , L^2 = L^2[0, +\infty) .$$

Let:

$$\omega_i^h = \{t_i : t_i = ih, \ i = 0, \dots, n-1\} , \ h = \frac{K}{n} ,$$

and:

$$\omega_s^{\bar{k}} = \{s_i : s_i = i\bar{k} \ i = 0, \dots, n-1\} , \ \bar{k} = \frac{\bar{K}}{n} , \bar{K} > 0 ,$$

be $2n$ collocation points.

By discretizing the Laplace integral equation on the grid $\omega_t^h \times \omega_s^k$ we obtain the linear system:

$$Af = F, \quad (3.1)$$

where $f_i = f(t_i)$, $F_i = F(s_i)$ and $A = (a_{ij})$ with:

$$a_{ij} = \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-s_i t} dt \right).$$

In Fig. 1 some values of the inverse of the condition number of the matrix A obtained through the LINPACK routine *dgeco* are plotted. These values show that the system (3.1) is strongly ill-conditioned.

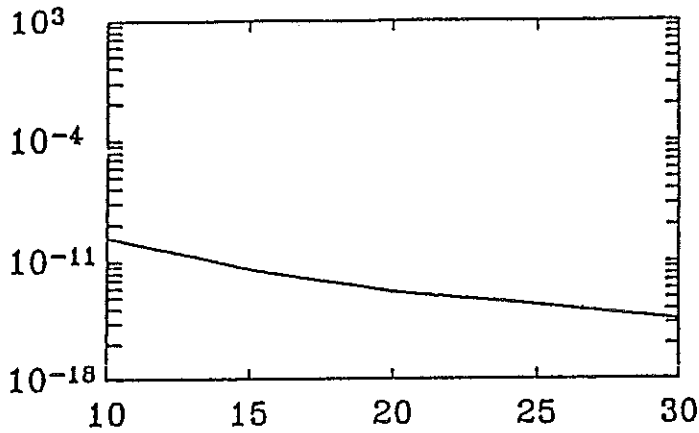


Fig.1

Behavior of the inverse of the condition number of A versus n .

Let

$$\|F\|_{L^2} = \sum_i F_i^2 ,$$

$$\|f\|_{C_{0K}} = \sum_i h f_i^2 + \sum_i \Delta f_i h ,$$

where:

$$\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} , i = 0, 1, \dots, n-1 , \text{ and } f_n = 0 .$$

By regularizing the linear system (3.1) we obtain:

$$\min_f \|Af - F\|_{L^2}^2 + \lambda \|f\|_{C_{0K}}^2 . \quad (3.2)$$

Let f_λ be the solution of (3.2), then it is easily shown that the sequence $\{f_\lambda\}$ converges to the solution of (3.1) as λ goes to zero.

To minimize :

$$\|Af - F\|_{L^2}^2 + \lambda \|f\|_{C_{0K}}^2$$

is equivalent to solve the linear system:

$$(A^T A + \lambda I) f = A^T F , \quad (3.3)$$

with I identity matrix; then the solution f_λ , for each fixed λ , is obtained by solving (3.3).

This discretization technique is used in [6], where the parameter λ is experimentally obtained from the errors on the data.

More precisely, let $y_i = F_i + e_i$, $i = 1, \dots, n$, and

$$\|F - y\|_{L^2}^2 \leq \delta_n^2 ,$$

then:

$$\lambda_n = \delta_n - \delta_n^\alpha ,$$

where $\alpha > 1$ is taken so that $\lambda_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ and $\{\frac{\delta_n^2}{\lambda_n}\}$ and $\{\frac{h^2}{\lambda_n}\}$ are bounded. Such a value of λ_n guarantees the convergence of $f_{n,\lambda_n}(t)$ to $f(t)$, as $n \rightarrow \infty$ [6].

By means of the CV technique, on the contrary, the optimal value of λ is computed by solving the problem:

$$\operatorname{argmin}_{\lambda} V_0(\lambda) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} f_j^{(k)} - F_k \right)^2 ,$$

where $f^{(k)} = (f_1^{(k)}, \dots, f_n^{(k)})$ is the solution vector of the linear system (3.3) in which the k -th row of A and the k -th element of F have been deleted.

3.2 Technique II

Let $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ be defined in $[0, T]$, and let $B_j(t)_{j=1, \dots, n-1}$ be B-splines functions of order 1, each of them defined in $[t_{j-1}, t_{j+1}]$ where $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$.

If we approximate $f(t)$ by:

$$\bar{f}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i B_i(t) ,$$

we need to know the coefficients x_i .

By substituting $\bar{f}$ in the Laplace integral equation:

$$\int_0^\infty e^{-s_i t} f(t) dt = F(s_i) , \quad i = 1, \dots, m ,$$

we have the linear system:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = F_i , \quad i = 1, \dots, m , \quad (3.4)$$

with $F_i = F(s_i)$ and:

$$a_{ij} = \int_{\beta_j}^{\alpha_j} e^{-s_i t} B_j(t) dt ,$$

where:

$$\alpha_j = \begin{cases} t_0 & \text{for } j = 1 \\ t_{j-1} & \text{for } j > 1 \end{cases} ,$$

and:

$$\beta_j = \begin{cases} t_{j+1} & \text{for } j < n-1 \\ t_n & \text{for } j = n-1 \end{cases} .$$

It is well known that, also in this case, the linear system obtained by discretizing the Laplace integral equation is ill-conditioned [1]. By applying a Tikhonov regularization method and choosing the identity operator as regularizing operator, we have:

$$\min_x \|Ax - F\|_2^2 + \lambda \|\bar{f}\|_2^2 , \quad (3.5)$$

where $F = (F_i)$. Let $G = (g_{ij})$ be a matrix with:

$$g_{ij} = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} B_i(t) B_j(t) dt ;$$

then we have:

$$\|\bar{f}\|_2 = x^T G x .$$

Let Γ be the lower triangular matrix derived from the Cholesky decomposition of G , $G = \Gamma^T \Gamma$; let $\theta = \Gamma x$ be, then the functional to be minimized is:

$$\|A\Gamma^{-1}\theta - F\|_2^2 + \lambda \theta^T \theta .$$

By a singular value decomposition of $A\Gamma^{-1}$, $A\Gamma^{-1} = USV^T$ with U, V orthogonal matrices and S diagonal matrix, the problem (3.5) is equivalent to solve the linear system:

$$(S^T S + \lambda I) \theta = S^T F . \quad (3.6)$$

Such a kind of discretization of the problem (1.2) is presented in [9], where the *discrepancy principle* (see [12]) is used to find the optimal value of λ .

By applying the CV technique we obtain on the contrary the optimal value of λ in the following way:

- for each fixed k ($k = 1, \dots, n$) we compute the vector $\theta^{(k)}$ solution of the minimum problem:

$$\min_{\theta^{(k)}} \|(A\Gamma^{-1})^{(k)} \theta^{(k)} - F^{(k)}\|_2^2 + \lambda (\theta^{(k)})^T \theta^{(k)} ,$$

where $(A\Gamma^{-1})^{(k)}$ is the matrix obtained by deleting the k -th row from $A\Gamma^{-1}$, $F^{(k)}$ and $\theta^{(k)}$ are the vectors F and θ whose k -th element has been deleted.

More precisely, for $k = 1, \dots, n$, $\theta^{(k)}$ is obtained by the following steps:

1. compute the singular value decomposition of $(A\Gamma^{-1})^{(k)}$:

$$(A\Gamma^{-1})^{(k)} = U^{(k)} S^{(k)} (V^{(k)})^T ;$$

2. solve:

$$\min \|S^{(k)} z - h\|_2^2 + \lambda z^T z ,$$

$$\text{with } h = (U^{(k)})^T F^{(k)} , \quad z = (V^{(k)})^T \theta^{(k)} .$$

Step 2 is equivalent to solve the diagonal system:

$$((S^{(k)})^T (S^{(k)}) + \lambda I) z = (S^{(k)})^T h . \quad (3.7)$$

- the optimal value of λ is the minimum of:

$$V_0(\lambda) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n ((A\Gamma^{-1})_{kj} \theta_j^{(k)} - F_k)^2 .$$

By means of such optimal value of λ we solve the problem (3.5), i.e. the linear system (3.6); once obtained the vector θ , we can compute the coefficients' vector x , and the function $f(t)$.

We note that the evaluation of $f(t)$ for each fixed t requires at most the summation of two terms of linear combination:

$$f(t) = \begin{cases} x_j & \text{for } t = t_j \\ x_j B_j(t) + x_{j+1} B_{j+1}(t) & \text{for } t_j < t < t_{j+1} . \end{cases}$$

4 Numerical Experiments

We use the function $f(t) = \frac{1}{10}\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, as proposed in [6], to test method I; we suppose, further, that the Transform function is affected by a perturbation $g_n(s)$ depending on n , the number of the collocation points; $\mathcal{L}f(s) = F(s) + g_n(s)$ with:

$$g_n(s) = \frac{n^4(1 - e^{-2\pi s})}{s^2 + n^8}$$

and:

$$F(s) = \frac{1 - e^{(-2\pi s)}}{10(s^2 + 1)}.$$

In Figs. 2, 3, 4 the true function $f(t)$ (solid line) and the computed function $h(t)$ (dashed line) by the CV technique, are plotted, with $n = 10, 20, 30$ respectively.

The maximum error $maxerr$ is:

$$maxerr = \max_{i=1,\dots,n} |f(t_i) - h(t_i)|$$

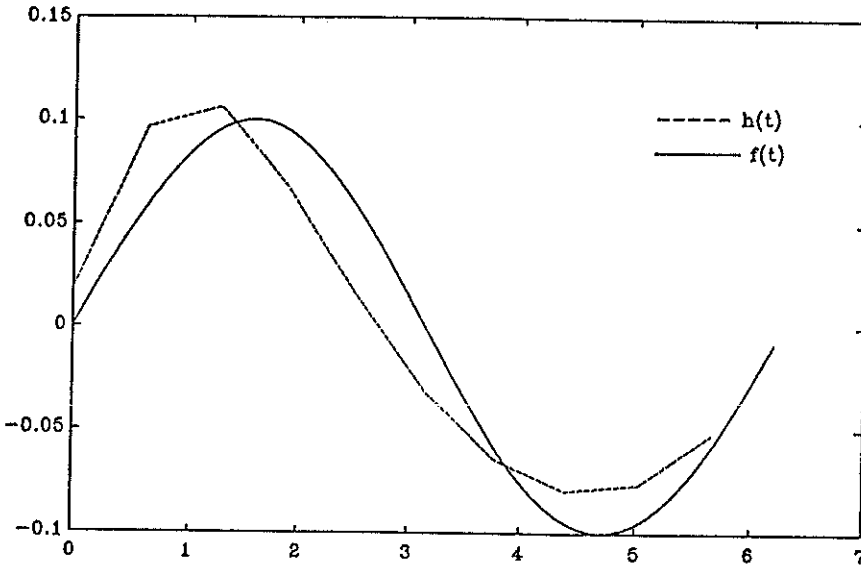


Fig. 2

Behavior of $f(t) = \frac{1}{10}\sin(t)$ and $h(t)$ computed by CV applied to the result deriving from Technique I. $maxerr=0.0432298$; $lambda=7.90583e-06$, $n=10$.

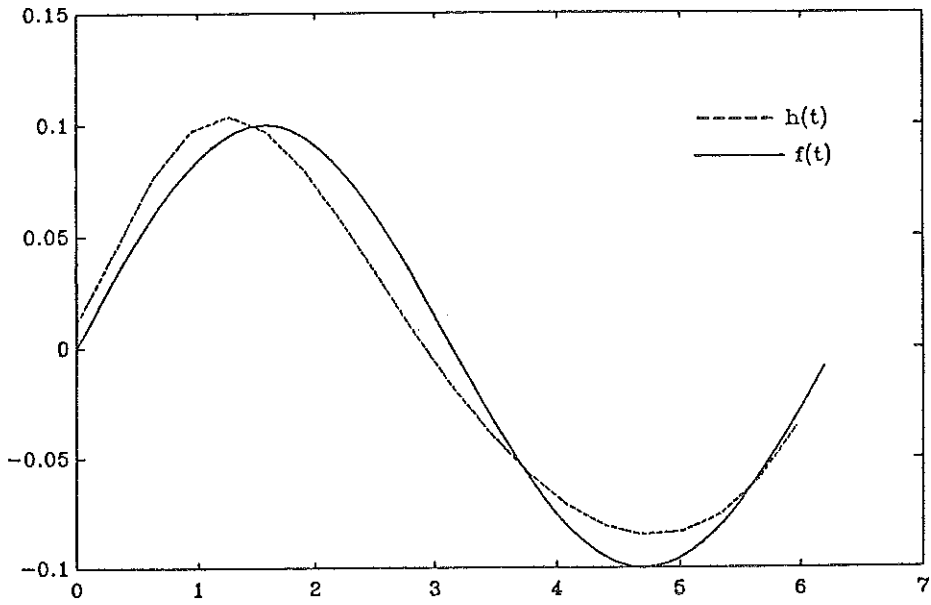


Fig. 3

Behavior of $f(t) = \frac{1}{10}\sin(t)$ and $h(t)$ computed by CV applied to the result deriving from Trechnique I. $maxerr=0.0257244$; $\lambda=2.20696e-05$, $n=20$.

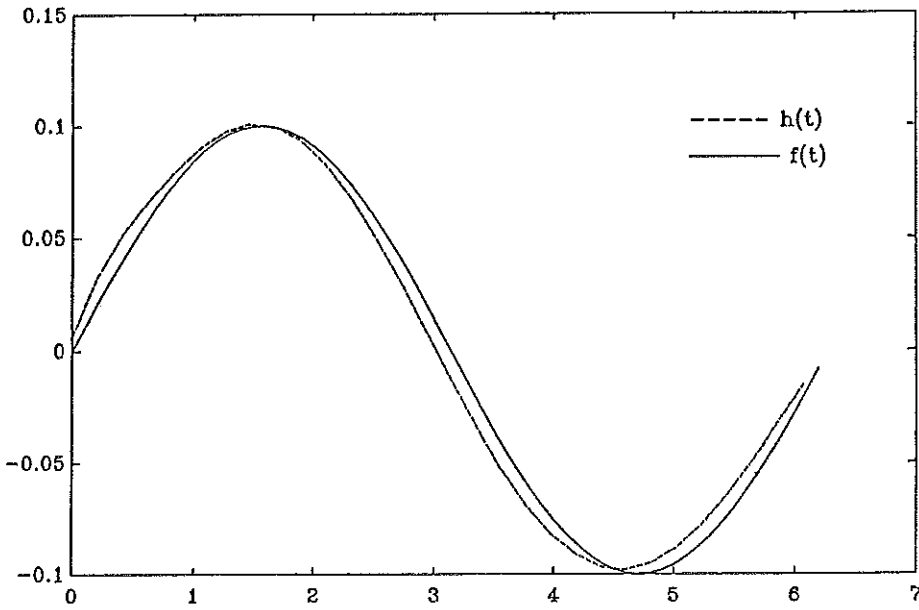


Fig. 4

Behavior of $f(t) = \frac{1}{10}\sin(t)$ and $h(t)$ computed by CV applied to the result deriving from Technique I. $maxerr=0.0128766$; $\lambda=1.68925e-08$, $n=30$.

From Figs. 2,3,4 we can note that the accuracy of the computed solution of the regularized problem (3.3) improves as n grows; the conditioning of the regularized problem is remarkably improved, as we see from Fig. 5; in this figure some values of the inverse of the condition number of (3.3), computed for $n = 10, 20, 30$ with the corresponding optimal value of λ , are

plotted.

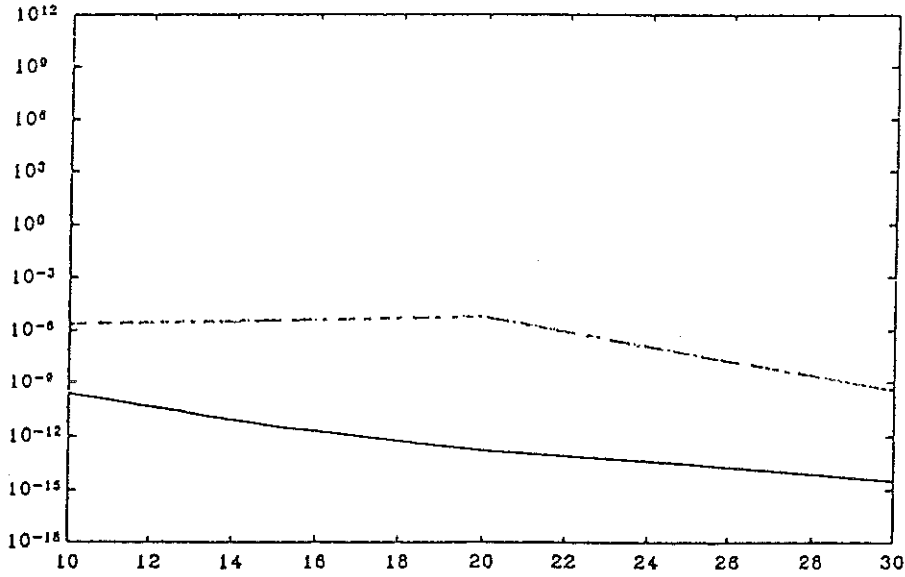


Fig. 5

Inverse of the condition number of A (not regularized case, solid line) and $A^T A + \lambda I$ (regularized case, dashed line).

We can add a random perturbation $p_n(s) = r \times g_n(s)$, r random number belonging to $] -1, 1[$, and $g_n(s)$ computed, for example, for $n = 5$ and $n = 10$.

In Figs. 6,7,8, again the true function and the computed one ($n = 10, 20, 30$), with p_n computed for $n = 5$, are plotted.

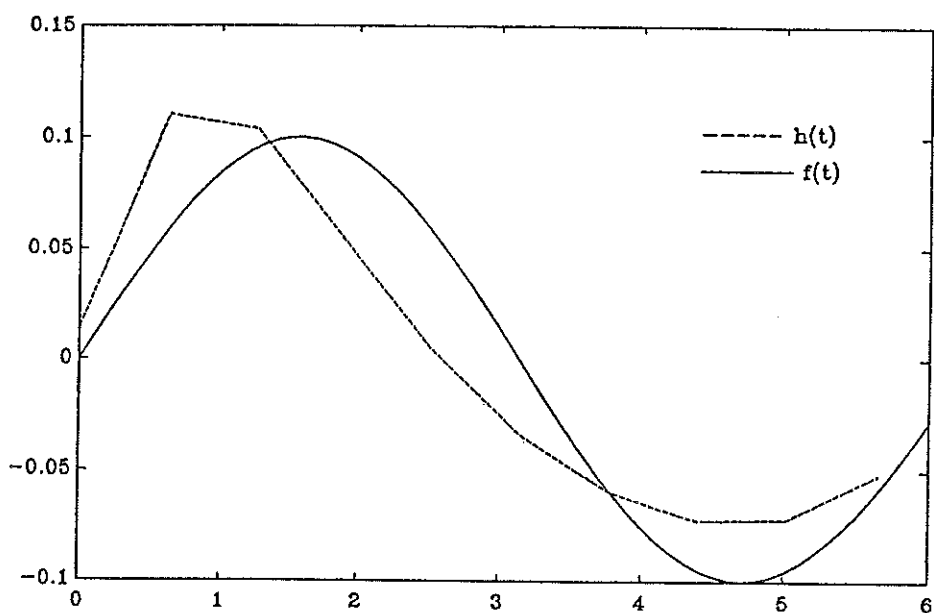


Fig. 6

Behavior of $f(t) = \frac{1}{10} \sin(t)$ and $h(t)$ computed by CV applied to the result deriving from Technique I. $n=10$, $L(f)(s) = F(s) + p_5(s)$.
 $maxerr=0.0534974$, $lambda=5.28365e-05$.

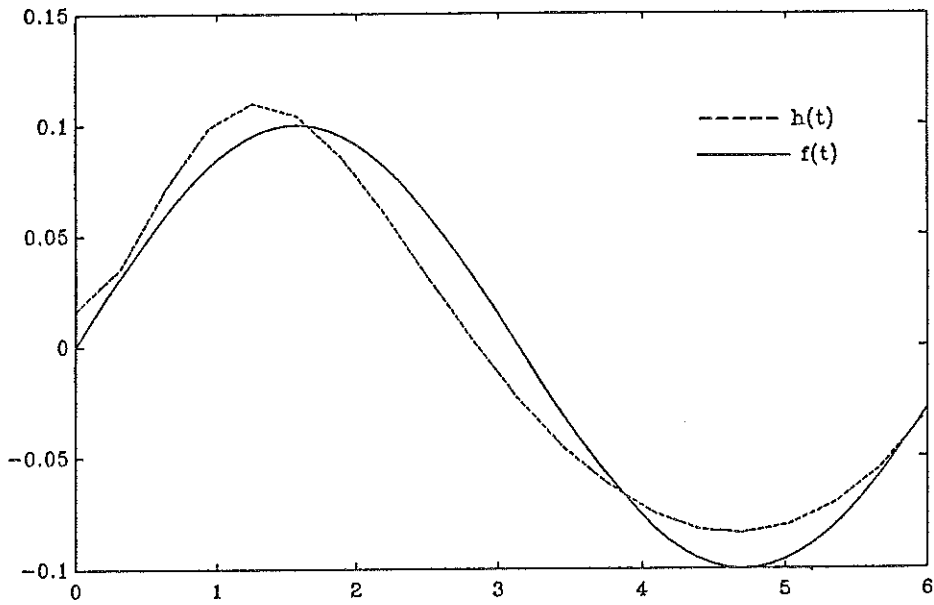


Fig. 7

Behavior of $f(t) = \frac{1}{10}\sin(t)$ and $h(t)$ computed by CV applied to the result deriving from Technique I. $n=20$, $L(f)(s) = F(s) + p_5(s)$.
 $maxerr=0.0287383$, $lambda=0.000113244$.

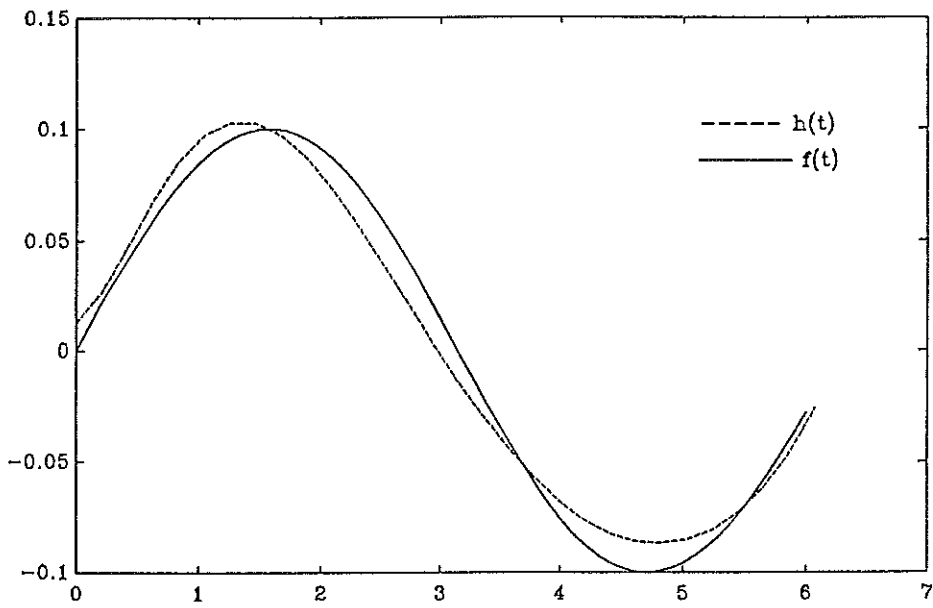


Fig. 8

Behavior of $f(t) = \frac{1}{10}\sin(t)$ and $h(t)$ computed by CV applied to the result deriving from Technique I. $n=30$, $L(f)(s) = F(s) + p_5(s)$.
 $maxerr= 0.0196304$, $lambda=0.000136318$.

In Fig. 9 we may see the behavior of the inverse of the condition number of $A^T A + \lambda I$, computed for $n = 10, 20, 30$. As we see, the conditioning of (3.3) is remarkably improved (the plot's scale is different from that of the previous plots to better realize the change of the condition number).

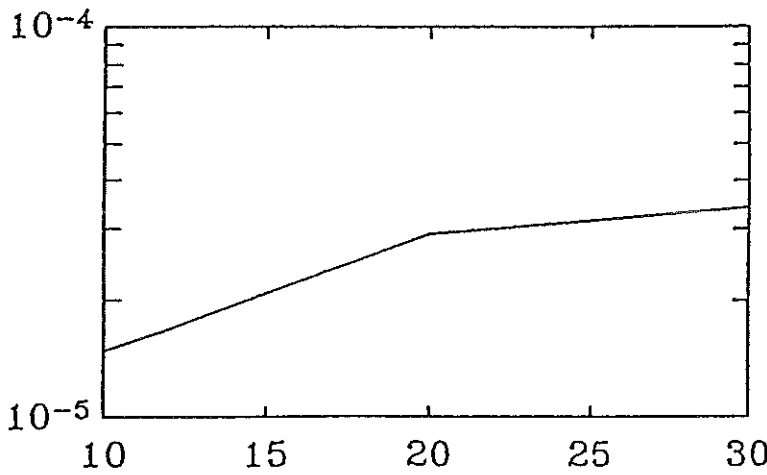


Fig. 9

Inverse of the condition number of $A^T A + \lambda I$.

In Figs. 10,11 the computed function has been obtained by using the perturbation for $n = 10$.

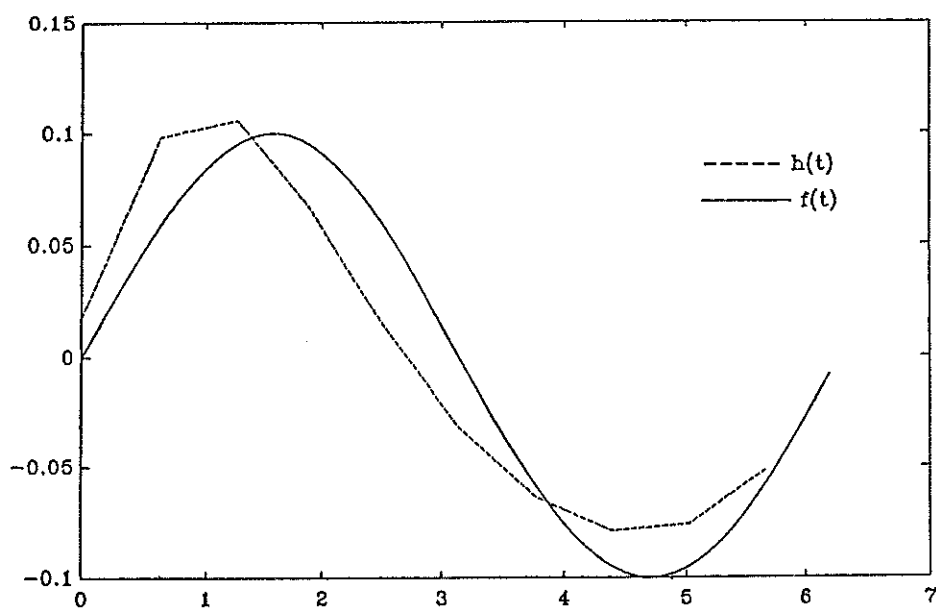


Fig. 10

Behavior of $f(t) = \frac{1}{10}\sin(t)$ and $h(t)$ computed by CV applied to the result deriving from Technique I. $n=10$, $L(f)(s) = F(s) + p_{10}(s)$.
 $maxerr=0.0441$, $lambda=4.507e-06$.

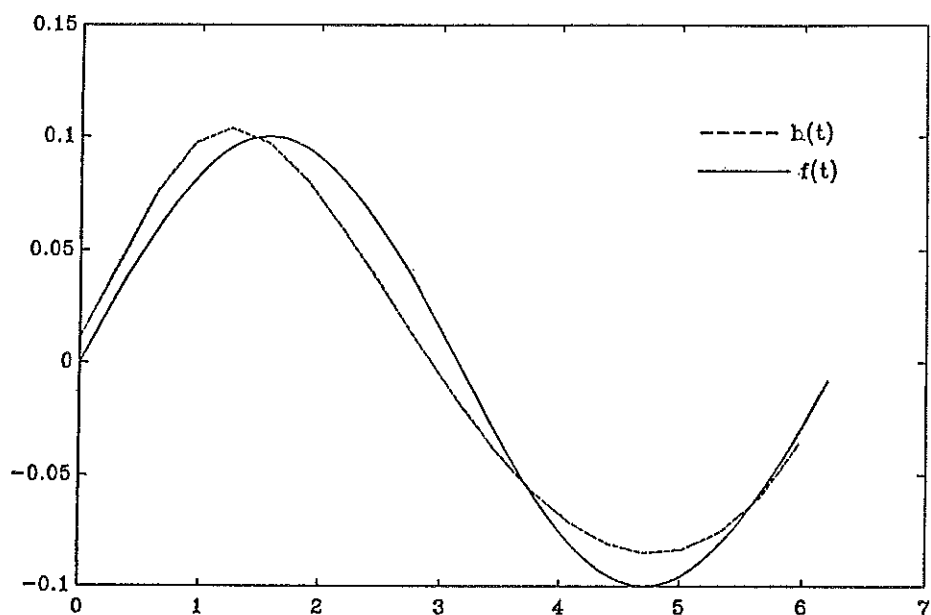


Fig. 11

Behavior of $f(t) = \frac{1}{10}\sin(t)$ and $h(t)$ computed by CV applied to the result deriving from Technique I. $n=20$, $L(f)(s) = F(s) + p_{10}(s)$.
 $maxerr=0.0263$, $lambda=2.3152e-05$.

As we see (Figs. 6-10), the error decreases as the number of knots grows.

The test functions used in conjunction with Method II are:

$$f(t) = e^{-t} ; f(t) = e^{-t} \sin(t) ; f(t) = \frac{1}{10} \sin(t) .$$

We suppose that the data are not affected by noise (first two functions are the same used in [9]) .

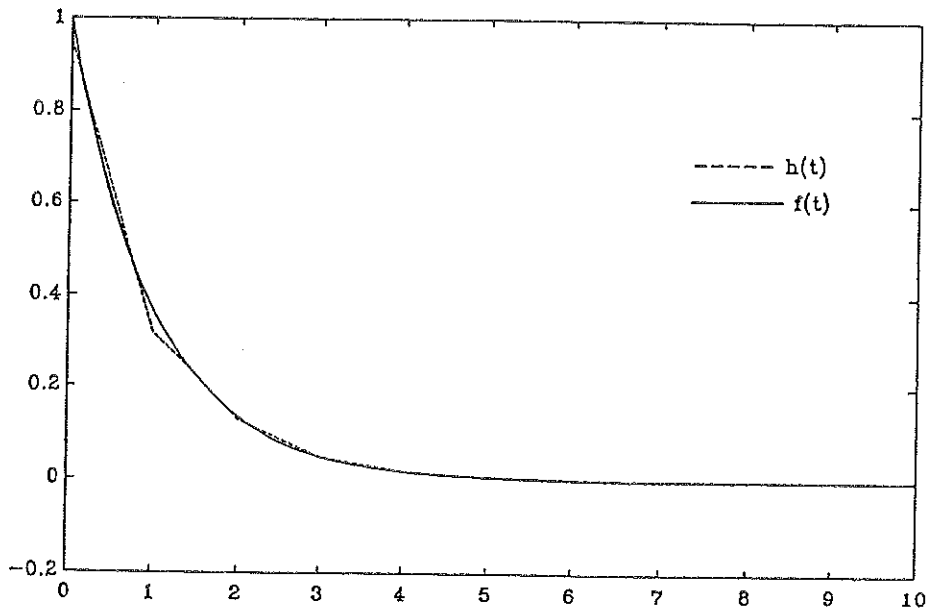


Fig. 12

Behavior of the true function $f(t) = e^{-t}$ and the computed function $h(t)$, obtained by CV applied to the problem deriving from Technique II.

$maxerr=0.0490125$, $lambda=0.066531$.

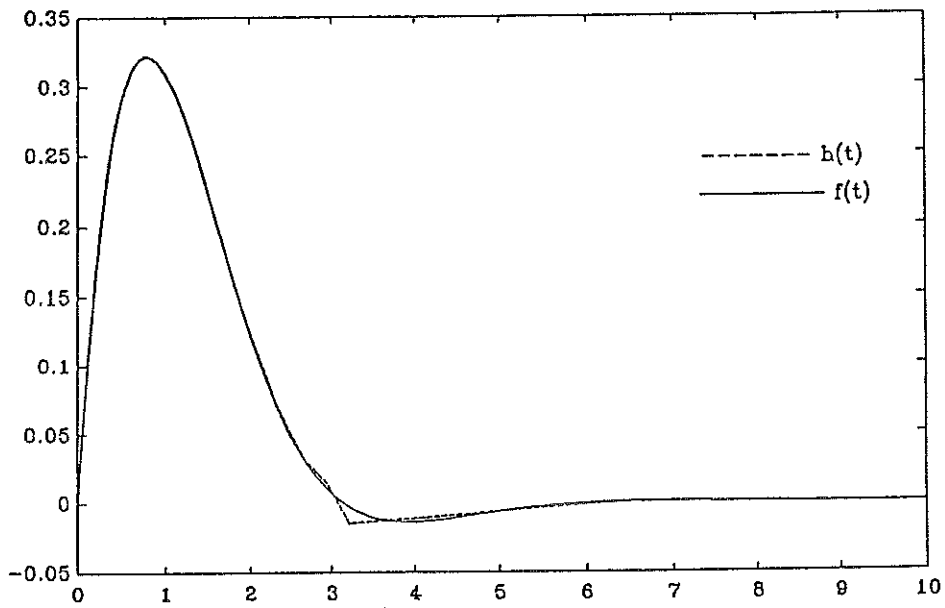


Fig. 13
 Behavior of the true function $f(t) = e^{-t}\sin(t)$ and the computed function $h(t)$, obtained by CV applied to the problem deriving from Technique II.
 $maxerr=0.0122416$, $lambda=6.6819e-05$.

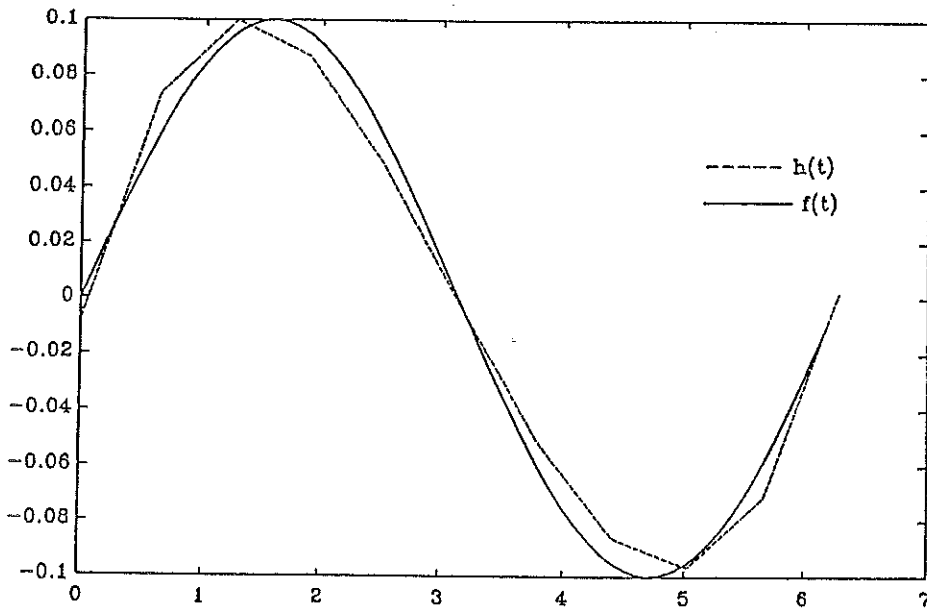


Fig. 14

Behavior of the true function $f(t) = \frac{1}{10}\sin(t)$ and the computed function $h(t)$, obtained by CV applied to the problem deriving from Technique II.

$maxerr=0.0144547$, $lambda=1.20541e-06$.

From Figs. 12-14 we can see that the value of λ obtained by the CV technique brings a sufficiently accurate result.

5 Final Remarks

The results discussed above show the effectiveness of the CV technique; the value of λ obtained in this way is a good estimate of the optimal value of the regularization parameter. We can note that the algorithm we propose is competitive (in terms of accuracy of the results) with those ones in [6,9]; the best feature of the CV technique, anyway, is that we can obtain the optimal value of the regularization parameter in a completely *automatic* way, with no knowledge about the noise on the data.

On the contrary, in [6,9] the authors use a way to find out λ that requires a knowledge about the errors.

In this paper we report our first experiences in applying the (ordinary) CV technique in the Tikhonov regularization methods applied to the numerical inversion of the Laplace Transform. This research is within a larger project devoted to build a mathematical software package for the inversion of the Laplace Transform.

References

- [1] Bellman R.E., Kalaba R.E., Lockett J. - "*Numerical inversion of the Laplace Transform*" - Elsevier, 1966.
- [2] Craven P., Wahba G. - "*Smoothing noisy data with spline functions*" - Num. Math. 31, 1979.
- [3] D'Amore L. - "*Alcuni metodi per l'inversione numerica della Trasformata di Laplace: premesse per la costruzione di un software*" - Preprint del Dip. di Mat. e Applic., Università di Napoli, 1990.
- [4] Delves L.M., Essah W. - "*On the numerical inversion of the Laplace Transformation*" - Inverse problems Vol.4, 1988.

- [5] Delves L.M., Babolian E. - "*An augmented Galerkin method for first kind Fredholm equations*" - J. Inst. Maths. Applics., 24, 1979.
- [6] Dong C.W. - "*A regularization method for the numerical inversion of the Laplace Trasformation*" - to appear in SIAM J. on Num. Anal., 1992.
- [7] Ghizzetti A., Ossicini A. - "*Trasformate di Laplace e calcolo simbolico*" - UTET, 1971.
- [8] Groetsch C.W. - "*The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equation of the first kind*" - Pitman, 1984.
- [9] Hanson R., Phillips J.L. - "*An adaptative numerical method for solving linear Fredholm integral equation of the first kind*" - Num. Math., Vol. 13, pp 291-307, 1975.
- [10] Hofman V. - "*Regularization for applied inverse and ill-posed problem*" - BSB Tenbner, 1986.
- [11] Lukas M.A. - "*Regularization*" - in R.S. Anderson et al. (ed) - The application on the numerical solution of integral equation - Sithoff and Noordoff, 1980.
- [12] Morozov V. - "*Methods for solving incorrectly posed problems*" - Springer, 1984.
- [13] Schumaker L., M. von Golitschek - "*Data fitting by penalized least square*" - in Mason, Cox (ed) - Algorithms for approx. II, Chapman and Hall, 1990.
- [14] Schoenberg J. - "*Remarks concerning a numerical inversion of the Laplace Transform due to Bellman, Kalaba, Lockett*" - J. Math. An. Appl., 43, 1973.
- [15] Talenti G. - "*Sui problemi mal posti*" - Boll. UMI, 1978.

- [16] Tikhonov A., Arsenin V.- " *Solution of ill-posed problems*"
- Wiley, 1977.
- [17] Wahba G. - " *Practical approximate solution of linear operator equation when the data are noisy*" - SIAM J. Num. An., Vol.14, No.4, 1977.

FLUSSO DI GAS ATTRAVERSO UN CILINDRO POROSO INDEFINITO

nota di: Antonio Marzocchella
presentata dal Socio: Prof. Leopoldo Massimilla
Adunanza del 15/5/1993

Riassunto

E' stato studiato il campo di moto fuori e dentro un cluster cilindrico di particelle solide investito da una corrente gassosa in moto uniforme. Il moto del gas è stato descritto mediante l'equazione di Eulero e l'equazione di D'Arcy, rispettivamente, fuori e dentro il cluster. L'applicazione di procedure semplificative normalmente adottate in casi analoghi ha permesso di ricondurre il modello ad una coppia di equazioni di Laplace.

Abstract

The flow field outside and inside a cylindrical cluster of solid particles immersed in an uniform stream of gas has been studied. Gas flow has been described by means of Eulero and D'Arcy equations outside and inside the cluster, respectively. The application of mathematical procedures normally used in similar cases has reduced the model to a couple of Laplace equations.

Key words: porous cluster, gas flow

INTRODUZIONE

La comprensione dei regimi di flusso di una corrente fluida rispetto ad aggregati di particelle è di notevole rilevanza in diversi processi industriali in relazione a problemi di attivazione di fenomeni di scambio di materia e di energia. Benché soddisfacenti informazioni siano disponibili nel caso di aggregati di varia natura immersi in correnti liquide in diverse condizioni di flusso (Christopher, 1969; Sutherland e Tan, 1970; Neale et al., 1973; Matsumoto e Suganuma, 1977), poco è noto circa il flusso di gas attraverso aggregati di particelle.

Recentemente è stato condotto uno studio sperimentale diretto a caratterizzare la dinamica di aggregati di particelle, **cluster**, in caduta libera in aria stagnante (Marzocchella et al., 1991). Da questo studio è apparso che, a seconda della granulometria delle particelle, i cluster possono essere classificati in tre gruppi (Fig. 1):

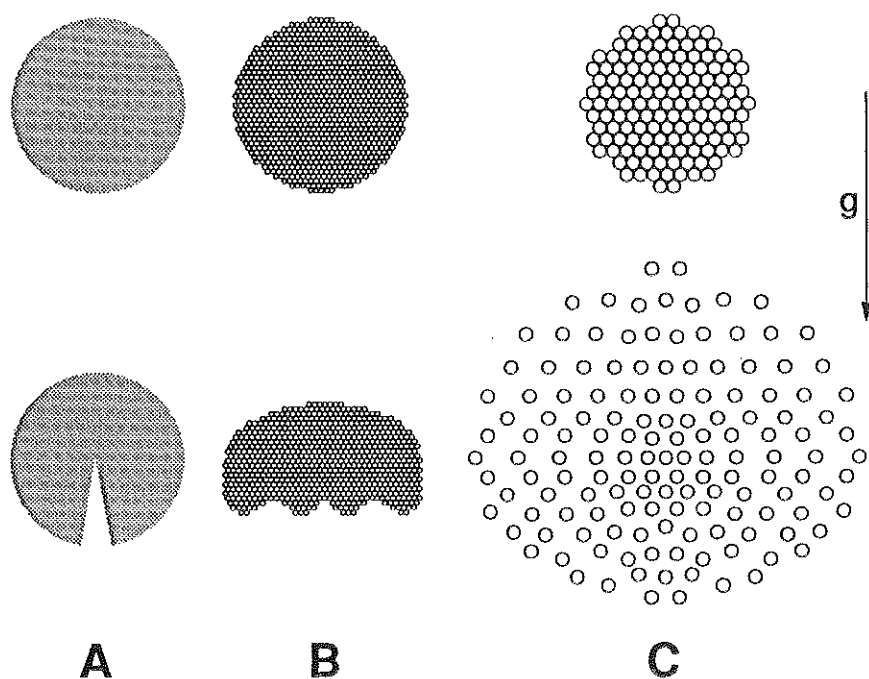


Fig. 1 Rappresentazione schematica dei fenomeni osservati durante la caduta di cluster di particelle in aria stagnante; g , accelerazione gravitazionale. A) cluster di particelle fini ($\cong 60 \mu\text{m}$); B) cluster di particelle a granulometria media ($90 + 400 \mu\text{m}$); C) cluster di particelle di granulometria grossolana ($> 800 \mu\text{m}$)

- i) cluster indeformabili, costituiti da particelle fini ($\cong 60 \mu\text{m}$). Essi mantengono la forma ed il volume iniziale fino alla comparsa e allo sviluppo di cricche che dividono il cluster in più parti (Fig. 1A);
- ii) cluster sostanzialmente impermeabili al gas, costituiti da particelle a granulometria intermedia ($90 + 400 \mu\text{m}$). Essi approssimativamente conservano il volume iniziale ma non la forma e si rompono a causa dell'amplificazione di perturbazioni dell'interfaccia tra il cluster e la fase gassosa sottostante (Fig. 1B);
- iii) cluster permeabili al gas, costituiti da particelle di granulometria grossolana ($> 800 \mu\text{m}$). Essi non conservano ne forma ne volume iniziale e si rompono per l'accentuarsi dell'espansione causata dalla filtrazione del gas attraverso il cluster (Fig. 1C).

Il presente studio è indirizzato all'individuazione di un modello di flusso del gas attraverso un cluster di quest'ultimo tipo. Il campo di moto fuori e dentro il cluster è stato descritto mediante le equazioni comunemente impiegate per campi di moto in fasi omogenee o pseudo omogenee indefinite. L'applicazione di procedure

semplificative adottate per problemi analoghi ha permesso di ridurre il modello a una coppia di equazioni di Laplace.

EQUAZIONI DEL MOTO

Le ipotesi di lavoro sono:

- il cluster è rappresentato da un corpo cilindrico infinito, indeformabile di raggio R_∞ composto di particelle costituenti un mezzo "omogeneo" isotropo di porosità ϵ_c e permeabilità k ;
- la corrente gassosa investe il cilindro in moto piano uniforme con velocità U_0 alla pressione p_0 in direzione perpendicolare all'asse del cilindro;
- il moto è stazionario: le derivate delle variabili in gioco (velocità e pressione) rispetto al tempo sono nulle;
- la densità, η_g , e la viscosità, μ_g , del gas sono costanti in tutto il campo;
- nella regione dello spazio esterna al cluster e nelle condizioni operative di interesse nel presente studio il gas può essere considerato inviscido;
- nella regione dello spazio occupato dal cluster il moto del gas filtrante è considerato viscoso

La simmetria cilindrica del problema (ipotesi a) permette di ridurlo dallo spazio tridimensionale a quello bidimensionale e suggerisce di assumere un riferimento polare (r, ϑ) con origine coincidente con il centro del cluster (Fig. 2).

Lo spazio oggetto dello studio è schematizzato nel modo seguente:

$\mathcal{C}$	regione occupata dal cluster	$\{(r, \vartheta): 0 \leq r < R_\infty \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$
$\mathcal{W}$	regione esterna al cluster	$\{(r, \vartheta): R_\infty < r \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$
$\mathcal{I}$	interfaccia del cluster	$\{(r, \vartheta): r = R_\infty \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$

Regione $\mathcal{W}$ esterna al cluster. Se denotiamo con p la pressione del gas comprensiva del termine gravitazionale, $\underline{v}$ il vettore velocità del gas, di componenti v_r e v_ϑ , il campo di moto è descritto dall'equazione di Eulero (ipotesi c ed e) (Lamb, 1932):

$$\eta_g \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p \quad (1)$$

e dall'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2)$$

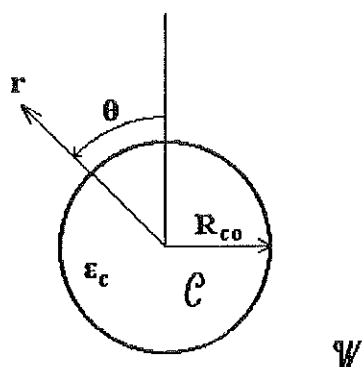


Fig. 2 Rappresentazione schematica degli spazi in cui si sviluppa il flusso di gas fuori e dentro un cilindro poroso.

La costante k che compare nella permeabilità $\frac{k}{\mu_g}$ del mezzo costituente il cluster è espressa dalla (Ergun, 1952):

$$k = 6.66 \cdot 10^{-13} \frac{\epsilon_c^3 d_p^2}{(1 - \epsilon_c)^2} \quad (5)$$

ove d_p è il diametro medio di Sauter delle particelle costituenti il cilindro (ipotesi a). L'equazione (3) è valida finché il termine di inerzia è trascurabile, ossia finché il numero di Reynolds relativo alla particella $\left(Re_p = \frac{\eta_g v' d_p}{\mu_g} \right)$ è inferiore a $10^2 \div 10^3$ (Ergun, 1952).

La descrizione del campo di moto in W mediante l'equazione di Eulero (1) non permette di considerare l'aderenza del fluido, e quindi la formazione dello strato limite, lungo J . D'altra parte l'equazione di D'Arcy (3) non può prevedere la formazione di uno strato limite all'interfaccia (Neale et al., 1973) a causa del basso grado. Dal che si deduce che il modello espresso dalle equazione (1), (2), (3) e (4) è incompleto ma congruente in quanto all'assenza dello strato limite all'interfaccia J dal lato della regione esterna al cluster W corrisponde analoga assenza dello strato limite dal lato della regione interna al cluster C .

Regione C occupata dal cluster. Se denotiamo con p' la pressione del gas comprensiva del termine gravitazionale, $\underline{v}'$ il vettore velocità del gas, di componenti v'_r e v'_θ , e $\frac{k}{\mu_g}$ il coefficiente di permeabilità, il campo di moto è descritto mediante l'equazione empirica di D'Arcy (ipotesi c ed f):

$$\underline{v}' = - \frac{k}{\mu_g} \nabla p' \quad (3)$$

e dall'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \underline{v}' = 0 \quad (4)$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

Le condizioni al contorno che devono essere soddisfatte nell'integrazione del set di equazioni (1-4) sono:

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \begin{cases} v_r(r, \vartheta) = U_o \cos \vartheta \\ v_\vartheta(r, \vartheta) = -U_o \sin \vartheta \end{cases} \quad (6) \quad (7)$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad p'(R_{co}, \vartheta) = p(R_{co}, \vartheta) \quad (8)$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad \epsilon_c v'_r(R_{co}, \vartheta) = v_r(R_{co}, \vartheta) \quad (9)$$

Le equazioni (6) e (7) esprimono la condizione di flusso uniforme all'infinito e le equazioni (8) e (9) la continuità della pressione e della componente radiale della velocità del gas all'interfaccia $\mathcal{I}$. Nessuna condizione è posta sulla componente ϑ della velocità e sullo sforzo tangenziale lungo $\mathcal{I}$ poichè, come precisato alla fine del paragrafo precedente, le equazioni impiegate non sono di grado sufficientemente alto da soddisfarle.

La determinazione del campo di moto del gas dentro e fuori il cluster si riduce, quindi, alla soluzione del set di sei equazioni scalari, costituite dalle componenti secondo r e ϑ delle due equazioni vettoriali (1) e (3) e dalle due equazioni scalari (2) e (4), nelle sei variabili v_r , v_ϑ , v'_r , v'_ϑ , p e p' .

ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI

Assunte R_{co} , U_o e p_o come grandezze di riferimento le variabili adimensionali sono:

$$\underline{u} = \frac{\underline{v}}{U_o} \quad \underline{u}' = \frac{\underline{v}'}{U_o} \quad P = \frac{p}{p_o} \quad P' = \frac{p'}{p_o}$$

ove $\underline{u}$ e $\underline{u}'$ sono la velocità adimensionale del gas, rispettivamente, nella regione esterna ed interna al cluster, P e P' la pressione adimensionale del gas, rispettivamente, nella regione esterna ed interna al cluster. Detta $\rho = r/R_{co}$ la variabile radiale adimensionale, gli spazi sono ridefiniti nel modo seguente:

$\mathcal{A}$	regione occupata dal cluster	$\{(\rho, \vartheta): 0 \leq \rho < 1 \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$
$\mathcal{V}$	regione esterna al cluster	$\{(\rho, \vartheta): 1 < \rho \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$
$\mathcal{B}$	interfaccia del cluster	$\{(\rho, \vartheta): 1 = \rho \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$

Le equazioni del moto adimensionalizzate sono:

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\beta \nabla P \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (11)$$

$$\underline{u}' = -\alpha \nabla P' \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \underline{u}' = 0 \quad (13)$$

ove $\alpha = \frac{k p_o}{U_o R_{co} \mu_g}$ e $\beta = \frac{p_o}{U_o^2 \eta_g}$ sono due parametri adimensionali.

Le nuove condizioni al contorno sono:

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \begin{cases} u_\rho(\rho, \vartheta) = \cos \vartheta \\ u_\vartheta(\rho, \vartheta) = -\sin \vartheta \end{cases} \quad (14)(15)$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad \varepsilon_c u'_\rho(1, \vartheta) = u_\rho(1, \vartheta) \quad (16)$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad P(1, \vartheta) = P'(1, \vartheta) \quad (17)$$

FUNZIONI ARMONICHE

Il campo di moto attraverso un cluster può essere agevolmente studiato mediante la teoria sulle funzione armoniche.

La divergenza della (12) tenendo presente la (13) si riduce all'equazione di Laplace della funzione $P'(\rho, \vartheta)$

$$\nabla^2 P' = 0 \quad (18)$$

quindi la funzione $P'(\rho, \vartheta)$ è armonica.

Le ipotesi del problema implicano l'esistenza di una funzione potenziale Φ del campo di moto in $\mathcal{V}$ (Lamb, 1932). Per tale funzione sussistono le seguenti relazioni:

$$u_\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \quad u_\vartheta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \quad (19)$$

Sostituendo le (19) nell'equazione di continuità adimensionalizzata (11) scritta in forma estesa

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0 \quad (20)$$

si ottiene l'equazione di Laplace della Φ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (21)$$

La relazione tra la funzione potenziale Φ e la pressione P si ottiene dall'equazione di Bernouilli (Lamb, 1932) adimensionalizzata:

$$P(\rho, \vartheta) + \frac{U_o^2 \eta_g}{2p_o} u_{(\rho, \vartheta)}^2 = 1 + \frac{U_o^2 \eta_g}{2p_o} \quad (22)$$

sostituendo le espressioni (19):

$$P(\rho, \vartheta) + \frac{U_o^2 \eta_g}{2p_o} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right]_{\rho, \vartheta} = 1 + \frac{U_o^2 \eta_g}{2p_o} \quad (23)$$

Il problema matematico consiste quindi nella determinazione di due funzioni armoniche P' e Φ nei rispettivi spazi di definizione con le condizioni al contorno:

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Phi}{\rho} = \cos \vartheta \quad (24)$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad -\alpha \varepsilon_c \left. \frac{\partial P'}{\partial \rho} \right|_{(1, \vartheta)} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|_{(1, \vartheta)} \quad (25)$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad P'(1, \vartheta) = \left(1 + \frac{U_o^2 \eta_g}{2p_o} \right) - \frac{U_o^2 \eta_g}{2p_o} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right]_{(1, \vartheta)} \quad (26)$$

L'analisi qualitativa del problema, l'indagine numerica e le verifiche sperimentali costituiranno argomento di prossima ricerca.

NOMENCLATURA

$\mathcal{C}, \mathcal{A}$	sottospazio di $\mathcal{R}^2$ occupato dal cluster
d_p	diametro medio di Sauter, μm
g	accelerazione gravitazionale, m/s^2
k	costante di permeabilità del cluster, m^2
p	pressione del fluido esternamente al cluster, Pa

p'	pressione del fluido nel cluster, Pa
p_o	pressione del fluido indisturbato, Pa
P	pressione adimensionale del fluido esternamente al cluster, -
P'	pressione adimensionale del fluido nel cluster, -
r	coordinata radiale, m
$\mathcal{R}^2$	spazio numerico costituito dall'insieme delle coppie ordinate di numeri reali
R_{co}	raggio del cluster, m
$Re_p = \frac{\eta_g v' d_p}{\mu_g}$	numero di Reynolds relativo alla particella, -
$\mathcal{I}, \mathcal{D}$	sottospazio di $\mathcal{R}^2$ interfaccia (cluster)-(fase gassosa esterna)
$\underline{u}, u_p, u_g$	vettore velocità adimensionale del gas fuori il cluster e sue componenti polari, -
$\underline{u}', u'_p, u'_g$	vettore velocità adimensionale del gas dentro il cluster e sue componenti polari, -
U_o	velocità del gas in moto uniforme, m/s
$\underline{v}, v_r, v_g$	vettore velocità del gas fuori il cluster e sue componenti polari, m/s
$\underline{v}', v'_r, v'_g$	vettore velocità del gas dentro il cluster e sue componenti polari, m/s
$\mathcal{W}, \mathcal{V}$	sottospazio di $\mathcal{R}^2$ esterno al cluster
α	costante di permeabilità adimensionale del cluster, -
β	parametro adimensionale dell'equazione del moto del gas esternamente al cluster, -
ϵ_o	grado di vuoto del cluster, -
η_g	densità del gas, kg/m ³
ϑ	coordinata angolare, rad
μ_g	viscosità del gas, Ns/m ²
ρ	coordinata radiale adimensionale, -
Φ	funzione potenziale del campo di moto del gas esternamente al cluster, -

BIBLIOGRAFIA

- Christopher, K.W.T., "The Drag on a Cloud of Spherical Particles in Low Reynolds Number Flow", *J. Fluid Mech.*, **38**, 537 (1969)
- Ergun, S., "Fluid Flow Through Packed Columns", *Chem. Eng. Progress*, **48**, 89 (1952)
- Lamb, H., "HYDRODYNAMICS", Ed. VI, New York, Dover Publications (1932)

- Marzocchella, A., U. Arena, A. Cammarota e L. Massimilla, "Break-up of cylindrical clusters of solids particles under gravity flow in a two-dimensional column", *Powder Technol.*, **65**, 453 (1991)
- Matsumoto, K. e A. Suganuma, "Settling Velocity of a Permeable Model Floc", *Chem. Eng. Science*, **32**, 445 (1977)
- Neale, G.N., N. Epstein e W. Nader, "Creeping Flow Relative to Permeable Spheres", *Chem. Eng. Science*, **28**, 1865 (1973)
- Sutherland, D.N. e C.T. Tan, "Sedimentation of a Porous Sphere", *Chem. Eng. Science*, **25**, 1948 (1970)

A DIV-CURL RESULT IN ORLICZ SPACES

Nota di Alfredo Dolcini

Presentata dal socio Carlo Sbordone

Adunanza del 15.5.93

Abstract: Given two vector fields B, E in $\mathbb{R}^N$, with $\operatorname{div} B = 0, \operatorname{curl} E = 0$, we study the properties of the product $E \cdot B$, when E and B belong to two Orlicz spaces in duality.

Riassunto: Dati due campi vettoriali B, E in $\mathbb{R}^N$, con $\operatorname{div} B = 0, \operatorname{rot} E = 0$, studiamo le proprietà del prodotto $E \cdot B$, quando E e B appartengono a due spazi di Orlicz in dualità.

1. Introduction

Let $B \in L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $E \in L^q(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, be two vector fields such that $\operatorname{div} B = 0$, $\operatorname{curl} E = 0$. In [CLMS] it is proved that

This work has been performed as a part of a National Research Project supported by MPI

the product $E \cdot B$ is more regular than just a function in L^1 . Namely it is proved that $E \cdot B$ belongs to a smaller space, the Hardy space $\mathcal{H}^1$. This regularity is due to the cancellation properties of the product and, as it is shown in [CLMS], has many non trivial consequences. In particular the jacobian J of a function $f \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ can be viewed as a product of the above type. Conversely if $N = 2$ every product $E \cdot B$ with, say $E, B \in L^2$, is the jacobian of a $W^{1,2}$ function.

In this paper we prove that the regularity result given in [CLMS] still holds in the framework of Orlicz spaces, more precisely we prove the following

Theorem 1.1: *Let $A(t)$ be an N -function, and $\tilde{A}(t)$ its conjugate. Suppose that there exists $1 < p \leq q < \infty$ for which $\frac{A(t)}{t^p}$ is increasing, $\frac{A(t)}{t^q}$ is decreasing, with $q < p^*(1)$. If $B \in L_A(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $E \in L_{\tilde{A}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $\operatorname{div} B = 0$, $\operatorname{curl} E = 0$, then $E \cdot B \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$. Moreover*

$$\|E \cdot B\|_{\mathcal{H}^1} \leq c \|E\|_{\tilde{A}} \|B\|_A .$$

The spaces to which this result applies include as a particular case the Zygmund spaces $L^p \log^\alpha L$, with $1 < p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Moreover, as in the case considered in [CLMS], as a consequence of this result, we have also the following extension of a well known result of Müller (see [M]).

Corollary 1.2: *Under the above assumptions on $A(t)$, if $f \in WL_A(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $|Df|^{N-1} \in L_{\tilde{A}}(\Omega)$ and the jacobian J of f is nonnegative, then $J \log(1+J) \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

For other results in spaces, related to nonnegative jacobians, see [MO].

⁽¹⁾ We set, as customary, $p^* = Np/(N-p)$ if $p < N$, any exponent bigger than p if $p \geq N$.

2. Preliminary results

In this section we shall give some preliminary result we shall use for the proof of theorem 1.1 . To this aim we recall the following definition of maximal function (see [BI]).

Let us denote with Q a cube in $\mathbb{R}^N$ with sides parallel to the coordinate axes, with Q_0 a fixed cube in $\mathbb{R}^N$, which may degenerate to the entire space $\mathbb{R}^N$.

Definition 2.1: If $s \geq 1$, $f : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$ is a measurable function, we define for any $x \in \mathbb{R}^N$

$$(M_s f)(x) = \sup_{x \in Q \subset Q_0} \left(\int_Q |f|^s \right)^{1/s} .$$

We now consider a continuous function $A : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ such that:

- (i) there exists $k > 0$ such that $A(2t) < kA(t)$ for any $t > 0$
- (ii) there exists $p > 1$ such that $\frac{A(t)}{t^p}$ is increasing.

We can now prove the following

Lemma 2.2: If (i) and (ii) hold and if $f \geq 0$ is a measurable function such that $A(f) \in L^1(Q_0)$, then

$$(1) \quad \int_{Q_0} A(M_s f) \leq c_0 \int_{Q_0} A(f) \quad \forall s : 1 \leq s < p ,$$

where $c_0 = c_0(N, p, s, k)$.

Proof: If $s = 1$, the result is given in Prop.1.2 in [FS].

If $1 < s < p$, setting $\bar{A}(t) = A(t^{1/s})$, it is easy to check that $\bar{A}(t)$ verifies (i) with k replaced by $2^{p(1-s)/s}k$ and (ii) with p replaced by p/s . Hence applying the case $s = 1$ to $\bar{A}$,

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} A(M_s f) &= \int_{Q_0} A((M(f^s))^{1/s}) = \int_{Q_0} \bar{A}(M(f^s)) \\ &\leq c_0 \int_{Q_0} \bar{A}(f^s) = c_0 \int_{Q_0} A(f) \quad . \end{aligned}$$

Remark 2.3: If A is an N-function, condition (i) above, which is known as global Δ_2 -condition, is equivalent to suppose that there exists $q > 1$ such that $A(t)/t^q$ is decreasing. On the other hand condition (ii) is equivalent to the global Δ_2 -condition for $\tilde{A}(t)$, the conjugate function of $A(t)$ (see [KR]). Moreover if the N-function $A(t)$ satisfies the assumptions of lemma 2.2, let $\lambda > 0$ be such that $\int_{Q_0} A(f/\lambda) \leq 1$. Since $c_0 \geq 1$ and $A(0) = 0$, using the convexity of $A(t)$ we have:

$$\int_{Q_0} A\left(\frac{M_s f}{c_0 \lambda}\right) \leq \frac{1}{c_0} \int_{Q_0} A\left(\frac{M_s f}{\lambda}\right) \leq 1$$

and so by the definition of the Luxemburg norm in Orlicz spaces we get

$$(2) \quad \|M_s(f)\|_A \leq c_0 \|f\|_A \quad .$$

If $1 < \alpha < \infty$ let us write $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$; we recall the following result (see [P], Th.1) :

Lemma 2.4 : *Let $A(t)$ be an N-function, and $\tilde{A}(t)$ its conjugate. $\frac{A(t)}{t^q}$ is decreasing ($q > 1$) if and only if $\frac{\tilde{A}(t)}{t^{q'}}$ is increasing .*

Finally we recall the definition of Hardy space $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$.

Let $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $h \geq 0$, $\text{supp}(h) \subset B(0, 1)$ and $h_t(x) = \frac{1}{t^N} h(\frac{x}{t})$, then we put

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ such that } \sup_{t>0} |h_t * f| \in L^1(\mathbb{R}^N) \right\} ,$$

equipped with the norm

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1} = \left\| \sup_{t>0} |h_t * f| \right\|_{L^1} .$$

Remark 2.5: If $f \geq 0$ and $f \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ then, taking $h \geq 1$ on $B(0, 1/2)$, also $M(f) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. Hence by a well known result due to E. Stein (see [S]) it follows that the function $f \log(1 + f) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$.

3. Proof of the main result

We now give the proof of theorem 1.1.

Let us take $B \in L_A(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, with $\text{div} B = 0$ and $E \in L_{\tilde{A}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, with $\text{curl} E = 0$. By lemma 2.4 $E \in L_{loc}^{q'}(\mathbb{R}^N)$ and so there exists $\pi \in L_{loc}^{(q')^*}(\mathbb{R}^N)$ such that $\nabla \pi = E$. Then there exists $\varepsilon > 0$ such that

$$(3) \quad (p - \varepsilon)' < (q')^* .$$

This inequality is trivial if $q' \geq N$, otherwise if $q' < N$

$$((q')^*)' = \frac{Nq'}{Nq' - N + q'} = \frac{Nq}{N + q} = q_* < p ;$$

hence if ε is such that $((q')^*)' < p - \varepsilon$ we get (3).

We also remark that since both $A(t)$ and $\tilde{A}(t)$ satisfy the global Δ_2 -condition (see remark 2.3), $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ is dense in the Orlicz-Sobolev space $WL_{\tilde{A}}(\mathbb{R}^N)$

(see th. 8.28 in [A]). So the assumption that $\operatorname{div} B = 0$ in the distributional sense implies that $\int B^i D_i \varphi = 0$ also if φ is any function in $WL_{\vec{A}}(\mathbb{R}^N)$. From this remark it follows that $\operatorname{div}(\pi B) = E \cdot B$ in the distributional sense.

If h is the function introduced in the previous section, for any $x \in \mathbb{R}^N$ and for all $t > 0$ we have:

$$\begin{aligned} h_t * (E \cdot B)(x) &= \frac{1}{t^N} \int_{B(x,t)} h\left(\frac{x-y}{t}\right) \operatorname{div}[B(y)\pi(y)] dy \\ &= \frac{1}{t^N} \int_{B(x,t)} \nabla h\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{B(y)\pi(y)}{t} dy \\ &= \frac{1}{t^N} \int_{B(x,t)} \nabla h\left(\frac{x-y}{t}\right) B(y) \left\{ \frac{\pi(y) - (\pi)_{x,t}}{t} \right\} dy, \end{aligned}$$

hence using the Sobolev-Poincaré inequality and the fact that $(p-\varepsilon)' < (q')^*$ we have

$$\begin{aligned} |h_t * (E \cdot B)(x)| &\leq c(N, h) \left(\int_{B(x,t)} |B|^{p-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{B(x,t)} \left| \frac{\pi(y) - (\pi)_{x,t}}{t} \right|^{(p-\varepsilon)'} \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\ &\leq c \left(\int_{B(x,t)} |B|^{p-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{B(x,t)} |\nabla \pi|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

where we denote by α the exponent $((p-\varepsilon)')^*$. Taking the supremum in both sides of the previous inequality we have

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} |h_t * (E \cdot B)(x)| &\leq c \sup_{t>0} \left(\int_{B(x,t)} |B|^{p-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \sup_{t>0} \left(\int_{B(x,t)} |\nabla \pi|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= c M_{p-\varepsilon}(B) M_\alpha(E) \end{aligned}$$

and so from lemma 2.2 and the subsequent remark, since $\alpha < q'$, we get

$$\left\| \sup_{t>0} |h_t * (E \cdot B)| \right\|_{L^1} \leq c \|M_{p-\varepsilon}(B)\|_{L_A} \|M_\alpha(E)\|_{L_{\tilde{A}}} \leq C \|B\|_{L_A} \|E\|_{L_{\tilde{A}}}$$

and this proves the result.

We conclude with some remark on the result just proved.

Remark 3.1: A particular case to which theorem 1.1 applies is when $B \in L^p \log^{\alpha p}$ with $1 < p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ and $E \in L^{p'} \log^{-\alpha p'}$ since it is easy to check that $A(t) = t^p \log^{\alpha p}(c+t)$ satisfies the assumptions of the theorem and $\tilde{A}(t)$ is equivalent to $t^{p'} \log^{-\alpha p'}(c+t)$.

An interesting case to which the theorem applies is when $f \in WL_A(\Omega, \mathbb{R}^N)$ and $|Df|^{N-1} \in L_{\tilde{A}}(\Omega)$. Then, writing the jacobian J of f as $E \cdot B$, where $E = \nabla f^i$ for some $i = 1, \dots, n$, and B is the vector whose components are the cofactor of the i -th row of the matrix Df , from theorem 1.1 we have that $J \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Then from remark 2.5 it follows that if $J \geq 0$, $J \log(1+J) \in L^1_{loc}(\Omega)$, which proves corollary 1.2.

References

- [A] R.Adams - *Sobolev Spaces*, Acad. Press (1975)
- [BI] B.Bojarski, T.Iwaniec - *Analytical Foundations of the Theory of Quasiconformal Mappings in $\mathbb{R}^N$* , Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A.I., 8 (1983), 257-324
- [CLMS] R.R.Coifman, P.L.Lions, Y.Meyer, S.Semmes - *Compacité par Compensation et Espaces de Hardy*, Journal de Mathematique Pure et Appliquees, to appear
- [FS] N.Fusco, C.Sbordone - *Higher Integrability of the Gradient of Minimizers of Functional with Nonstandard Growth Conditions*, Comm. on Pure and Appl. Math., 43 (1990), 673-680

- [GI] **L.Greco, T.Iwaniec** - *New Inequalities for the Jacobians*, Preprint Univ. Napoli (1992), to appear on Annales de l'I.H.P.
- [KR] **M.A.Krasnoselskii, Ya.B.Rutickii** - **Convex Function and Orlicz Spaces*, Noordhoff Groningen (1961)
- [MO] **G.Moscariello** - *On the Integrability of the Jacobian in Orlicz Spaces*, Math. Japonica, to appear
- [M] **S.Müller** - *Higher Integrability of Determinants and Weak Convergence in L^1* , J. Reine Angew. Math., 412 (1990), 20-34
- [P] **G.Palmieri** - *Alcuni Contributi alla Teoria degli Spazi di Sobolev-Orlicz*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. IV, XLV (1978), 367-381
- [RR] **M.M.Rao, Z.D.Ren** - **Theory of Orlicz Spaces*, M.Dekker Inc. (1991)
- [S] **E.M.Stein** - *Note on the Class $L \log L$* , Studia Math., 32 (1969)

IL MUSEO DI MINERALOGIA E L'ANTICA BIBLIOTECA GESUITICA DEL COLLEGIO MASSIMO

Nota di Aldo Pinto

Presentata dal Socio Bruno D'Argenio
Adunanza del 3 giugno 1993

RIASSUNTO

L'esigenza di effettuare opere di consolidamento e restauro nel salone del Museo mineralogico ha reso possibile l'approfondimento degli studi già pubblicati da A. Scherillo sulla storia della struttura museale sistemata agli inizi del XVIII secolo nella seicentesca biblioteca gesuitica.

I lavori eseguiti hanno consentito, tra l'altro, il restauro del pavimento realizzato nel 1862 ed il recupero dell'originaria forma della copertura con raccordi curvi perimetrali.

ABSTRACT

The need of consolidating and restoring of the room of the Mineralogy Museum made it possible to examine closely the studies already published by A. Scherillo about the history of the museal structure located at the beginning of XVIII century in the six hundred Jesuitical library.

The realized works made it possible also to restore the floor of 1862 and to recover the original form of the covering with its perimetrical curved connections.

* * *

Nel 1982, per l'aggravamento di situazioni pregresse derivanti sia da infiltrazioni di acque meteoriche con possibilità di caduta di elementi della soffittatura sia da dissesti statici provocati dal sisma del 1980, l'Università "Federico II" fu

costretta a chiudere al pubblico il Museo mineralogico sito nell'antico Collegio massimo dei Gesuiti. In conseguenza furono sospese le visite guidate dirette agli studenti, medi ed universitari, che sistematicamente, a partire dal 1969, venivano svolte per mostrare il prezioso patrimonio mineralogico dell'Ateneo napoletano.

Proseguì solamente l'attività scientifica anche se in una condizione non ottimale ed in presenza di un ambiente che non poteva ritenersi consono all'importanza del museo non solo dal punto di vista culturale ma anche per l'interesse storico della sala che ha ospitato prima la biblioteca dei Gesuiti, poi il museo di Mineralogia ed, infine, varie manifestazioni che vanno dal Congresso degli Scienziati nel 1845, alle riunioni della Camera dei deputati nel 1848, alle votazioni per l'annessione al Regno d'Italia nel 1860.

Per la verità sussistevano anche altri problemi che evidenziavano la necessità di un radicale intervento che riguardasse non solo il ripristino dei danni sopra evidenziati ma anche aspetti afferenti alla sfera del restauro. Infatti la presenza di infissi esterni in ferro, di pavimento maiolicato ottocentesco sconnesso in vari punti e con molte piastrelle spaccate o lesionate, di soffittatura completamente piana in contrasto con la originaria configurazione architettonica e varie situazioni secondarie richiedevano un attento esame per individuare attraverso l'analisi storica il più coerente intervento da effettuare; analisi che affrontata metodologicamente per la ricerca di tutte le notizie che hanno interessato la struttura a partire dalla costruzione della biblioteca gesuitica fino alle trasformazioni ottocentesche, ha consentito l'acquisizione dei necessari elementi per effettuare le conseguenti scelte progettuali.

Innanzitutto e da tener presente che il complesso che oggi ospita il museo di Mineralogia costituiva l'antico Collegio massimo dei Gesuiti che nel 1554, dopo una provvisoria sistemazione in una casa al vico Gigante, acquistarono, grazie al contributo di nobili napoletani, il palazzo di Gian Tommaso Carafa nell'attuale via Paladino (1). Da questo momento inizia la progressiva espansione edilizia che raggiunse la massima dimensione alla metà del XVIII secolo, cioè poco prima della espulsione della Compagnia di Gesù dal Regno di Napoli (1767).

Infatti nel giro di qualche decennio i padri entrarono in possesso di numerose proprietà della zona e procedettero alla costruzione di una prima chiesa (1557-1567) demolita poi dopo il completamento della seconda (attuale Gesù Vecchio) realizzata su progetto del padre P. Provedi tra il 1614 e il 1624. Nello stesso tempo costruirono prima il cortile cinquecentesco su progetto di Giovanni de Rosis sostituito ben presto, da quello seicentesco di Giuseppe Valeriano (attuale cortile delle Statue).

Nella seconda metà del Seicento proseguì l'attività edilizia per soddisfare nuove esigenze stante il continuo aumento del numero dei padri e delle attività svolte

dalla Compagnia. Così si costruì il nuovo refettorio su progetto di Dionisio Lazzari completato intorno al 1684 quando venne presa la decisione di realizzare, in aderenza allo stesso, un altro volume edilizio per sistemare le due preesistenti "copiosissime biblioteche"; le due edizioni della guida del Samelli (1685 e 1688) ci forniscono i termini temporali della costruzione. Infatti nella prima edizione viene citata l'esistenza delle due biblioteche, una delle quali ospitava tutti i libri degli autori della Compagnia, rilegati in pelle rossa; nella seconda edizione la notizia viene integrata con: "e al presente si è terminata una fabbrica molto magnifica per riporvi tutti i libri" (2).

La guida del Celano (1692) conferma quanto riportato dal Samelli anche se a quattro anni di distanza la nuova biblioteca non risulta ancora terminata; probabilmente per il terremoto del 1688 i lavori dovettero subire un rallentamento. Ma passarono ancora molti anni prima di vedere ultimata, in tutti i particolari, la nuova biblioteca; la delicatezza dei lavori di finitura e la realizzazione degli arredi di particolare bellezza eseguiti in noce, in oliva ed altri legni pregiati richiesero molto tempo e l'apertura si ebbe solo nel 1700.

Le "schanze", completate nel 1695, furono realizzate dall' "insignis faber lignarius" Corrado Guden (1658-1743) appartenente alla stessa Compagnia dove era entrato nel noviziato fin al 1684 (3). Tra il 1695 e il 1700 il pittore Paolo de Mattheis (1663-1728), eseguì gli affreschi sulle pareti della biblioteca; il de Mattheis nello stesso periodo aveva in corso altri lavori per i Gesuiti come la dipintura della copertura della chiesa di S. Francesco Saverio e della volta del Cappellone di Sant'Ignazio nella chiesa del Gesù nuovo (4).

Una sintetica ed interessante descrizione appare nella seconda edizione della Guida del Celano del 1724: "Sta ora terminato, cogli Armarj tutti di legno di noce, delicatamente lavorati. Ave ella due ordini, uno inferiore e l'altro superiore si vedono tutti i libri fin'ora usciti dalle penne dei Gesuiti, ligati in pelle cremesi, e posti in oro; e veramente la quantità d'ammirazione" (5).

La situazione planimetrica della biblioteca intorno alla metà del XVIII secolo risulta riportata in una pianta esistente presso l'Archivio di Stato di Napoli, dove appaiono già edificati, anche se per un solo piano, i due corpi di fabbrica che racchiudono il cosiddetto cortile del "Lazzari" (autore del refettorio prospettante su questo cortile); inoltre sul lato minore verso il mare è presente un ambiente con due corridoi a croce e quattro locali negli angoli definito nella legenda "Moseo non terminato".

Nel 1767 i Gesuiti furono costretti a lasciare precipitosamente il Collegio massimo per l'espulsione decretata dal Re Ferdinando IV su pressione del segretario Bernardo Tanucci, lasciando i libri e tutti gli altri beni nel complesso; nel 1772 i volumi

dovevano ancora essere al loro posto in quanto il libraio Francesco Altobelli compila l'inventario della biblioteca seguendo l'ordine topografico (6).

Dopo l'espulsione Ferdinando IV con due prammatiche ("De Jesuitis" del 25.3.1768 e "De Regime studiorum" del 12.1.1770) istituì nei locali dell'abolito Collegio massimo prima le scuole pubbliche con la denominazione di "Casa del Salvatore" e, poi, il Real Convitto del Salvatore; inoltre con decreto del 26 settembre 1777 riunì varie cattedre dell'Università (ubicate nel palazzo degli Studi fuori la porta di Costantinopoli) con altre cattedre già esistenti nella "Casa del Salvatore" per formare "un Corpo intiero e compiuto cominciando da' primi elementi fin alle Facoltà ed alle Scienze più sublimi". Con tale atto il complesso diventa definitivamente sede universitaria, tranne un breve periodo tra il 1804 e il 1806 quando ritornano i Gesuiti (7).

Con lo stesso decreto del 1777 venne disposta la costituzione di un Museo di Storia Naturale che in seguito troverà la sua collocazione nella biblioteca dei Gesuiti. Però prima di questa destinazione la biblioteca e alcuni locali della Casa del Salvatore, con dispaccio del 23.6.1779, furono assegnati all'Accademia di Scienze e Belle Lettere; in particolare nel salone della biblioteca gesuitica Giuseppe Carulli il 29.6.1780 recitò l'orazione inaugurale dell'Accademia alla presenza del Re Ferdinando IV e della Regina Maria Carolina (8).

Nel 1788 lo stato della biblioteca era ancora immutato; ce lo descrive in dettaglio il Sigismondo: "Si può passare ad osservare la sorprendente libreria che fu degli Espulsi, situata in una vasta sala cogli armadi delicatamente lavorati in noce, e con intagli dell'ultima perfezione, e statue allusive alle scienze ed arti di legno tinto a color di rame, che formano un maestoso colpo d'occhio. Ella è divisa in due ordini di scanzie una sottoposta all'altra, e nel piano superiore vi si ascende per delle scale a lumaca fatte con somma maestria: cosa degna veramente di essere osservata. Una tal libreria è ricca di più migliaia di volumi. Vi sono d'intorno delle belle dipinture di Paolo de Mattheis; vi sono delle eccellenti machine per le scienze fisiche, matematiche, ed astronomiche, de' perfettissimi globi sì terrestre, che celeste, e dei sistemi Tolemaico, e Copernicano; quali cose tutte si sono date oggi per uso dell'Accademia sudetta, e de'suoi membri" (9). La descrizione conferma che nella sala sono ancora presenti i volumi della biblioteca dei Gesuiti.

Dopo gli eventi della Repubblica del '99, la biblioteca cambiò totalmente il suo aspetto per le trasformazioni disposte dal ministro Zurlo per sistemare il Museo di Storia Naturale (poi Museo di Mineralogia). Infatti nel 1801, dopo il rientro dalla Sicilia del principe ereditario Francesco, "il capomastro muratore Nicola Mazzola, il cristallaro Giuseppe Mennillo e l'ebanista Nicola Henzel" agli ordini del Soprintendente del

Museo di Storia Naturale Cavaliere D. Antonio Planelli e con la direzione del Tavolario del S.R.C. D. Francesco Maresca ebbero l'incarico di formare in quattro mesi il citato museo (10).

Tale termine, però, non fu rispettato in quanto il 23.11.1802 il Maresca chiedeva al Direttore della Real Segreteria di Stato ed Azienda, Giuseppe Zurlo, l'istituzione di un servizio di guardia trovandosi "la costruzione dello stiglio, ed altre suppellettili... molto inoltrata" ed "i materiali da esporsi...in gran copia di già acquistati ed introdotti nell'enunciato locale" (11). Tra i materiali acquistati vi erano anche le casse dei minerali portate nel Regno dagli ingegneri Matteo Tondi e Carmine Antonio Lippi incaricati di studiare mineralogia in Inghilterra e in Germania.

Quindi la data di apertura del museo indicata da vari autori per il 28 marzo 1801 non appare reale tenuto conto delle considerazioni prima esposte; questa data deve essere quella di fondazione disposta con provvedimento del ministro Zurlo (12).

La formazione del museo comportò una rilevante spesa (130.000 ducati) anticipata prevalentemente dagli appaltatori che ancora alla fine del 1803 supplicavano il nuovo Direttore della R. Segreteria di Stato ed Azienda di provvedere al pagamento delle ingenti somme rimaste insolute. La gravissima situazione economica del Regno di Napoli che non consentiva neanche il pagamento del personale per la mancanza di denaro in cassa, non impedì al ministro Zurlo di avviare e portare a compimento varie iniziative di carattere culturale come i lavori per l'apertura della biblioteca borbonica nel palazzo fuori Costantinopoli e la formazione del museo di Storia naturale (13).

Comunque nel 1803 il museo doveva essere ultimato e completo di tappezzerie in quanto il 7.12.1803 il maestro Vico di Pietro chiede una perizia a Francesco Maresca per "l'opera del suo mestiere impiegato per il R.le Museo Mineralogico"; in questa notizia appare per la prima volta la denominazione di Museo mineralogico che, il 14.12.1804, si trova associata a quella di Storia naturale in occasione dell'affidamento della Soprintendenza e direzione del "Museo Mineralogico e di Storia Naturale" al Ten.e d. Giuseppe Poli (14). Soprintendenza rimasta vacante per la morte del Cav. Planelli nel 1802 e per la quale già nell'ottobre del 1803 aveva presentato una supplica "per la cessione dell'impiego di Soprintendente del Museo di Storia Naturale" il barone di Ostigliano, D. Rosario Ciardulli (15).

Intanto per la riammissione dei Gesuiti nel Regno il complesso in data 8.8.1804 fu restituito alla Compagnia anche se probabilmente non ottenne la zona destinata a museo; infatti due notizie sembrano confermare tale ipotesi: la prima che il 28.11.1804 si ordina di eseguire "un accesso separato dal Real Museo d'Istoria Naturale dall'abitazione che occupano li PP. Gesuiti"; la seconda che il 17.12.1804

Nicola Fenizio, negoziante di seterie, implora il pagamento dei tessuti color verde usati per le tende del Museo mineralogico (16).

Ma la permanenza dei Gesuiti dura ben poco e dopo la fuga di Ferdinando IV (23.1.1806) e l'entrata di Giuseppe Bonaparte, il 3.7.1806 la Compagnia fu nuovamente soppressa; con lo stesso provvedimento il complesso fu destinato a Collegio Reale della Provincia, all'Università ed alla deputazione della revisione dei libri esteri. Inoltre fu confermata la presenza del Museo mineralogico posto sotto l'ispezione del Ministro dell'Interno (17), mentre il Soprintendente Giuseppe Poli, che aveva anche il comando della Reale Accademia dell'Annunziata, all'avvicinarsi dei francesi scappa con la Corte a Palermo (18).

Il nuovo direttore del museo fu Vincenzo Ramondini che il 5 gennaio 1807 ottenne anche la cattedra di Mineralogia già assegnata al Tondi il quale sembra non averne mai preso possesso; in tal modo si riunificarono in una persona la cattedra di Mineralogia e la direzione del Museo mineralogico.

Nel 1808 il ministro Capecepolo dispose la costituzione della biblioteca universitaria assegnando per tale scopo il salone al primo piano del cortile seicentesco del Valeriano, utilizzato prima dai Gesuiti e poi dall'Università per le solenni manifestazioni accademiche; contemporaneamente dispose che il Museo mineralogico e la grande aula di disegno ex refettorio dei Gesuiti fossero utilizzate dall'Università per le suddette cerimonie.

Rapidamente, però, il museo decadde sia per dissesti al soffitto che per la progressiva dispersione del materiale mineralogico (19) per cui dopo appena dieci anni furono necessari importanti lavori per restaurare essenzialmente il soffitto a riquadri che si presentava in condizioni molto precarie. La testimonianza del restauro ci viene da una lapide fatta apporre da Ferdinando IV all'ingresso del museo che, rimossa nel 1860 ed andata dispersa, è stata rifatta da Antonio Scherillo intorno al 1965. Il testo della lapide è il seguente: FERDINANDUS I, UTRIUSQUE SICILIAE REX P. (ius) F. (elix) A. (ugustus) ORYCTOPHILACTUM REGALI MAGNIFICENTIA ANNO MDCCCI EXORNATUM INSTRUCTUM TEMPORIS EDACITATE AC DELUMBATI LAQUEARIS RUINA DEFORMATUM SQUALIDUM IN ELEGANTIOREM FORMAM RESTITUIT ANNO MDCCCXIX; gli aggettivi "deformatum, squalidum" rendono molto bene l'idea dello stato di degrado raggiunto dal museo che nel 1818 occupava anche cinque stanze nel convento di Monteverginella probabilmente per consentire i lavori di restauro (20).

Anche l'Imperatore d'Austria Francesco II durante la sua permanenza a Napoli tra il marzo e il giugno del 1819 visitò il museo; in quel momento era direttore del museo e titolare della cattedra di "Geognosia" Matteo Tondi, nominato il 28.7.1815 e

che tenne questa carica fino alla sua morte (16.11.1835). Qualche anno dopo sulle adiacenti terrazze furono costruiti i saloni che oggi ospitano il museo di Zoologia (21).

Dopo un lungo periodo di vacanza finalmente la cattedra di "Mineralogia e Geologia" fu assegnata ad Arcangelo Scacchi che il 1° Agosto 1844 assunse anche la direzione del Real Museo Mineralogico; è il momento migliore del museo che lo vede sede di importanti manifestazioni. La prima nel 1845 quando nella sala venne inaugurato il settimo Congresso degli Scienziati italiani alla presenza del Re, della Regina e di circa seicento congressisti; la presidenza fu data al Cav. Nicola Santangelo che pronunciò il discorso di apertura (22). Una stampa esistente al Museo di San Martino rappresenta la gremitissima sala del Museo mineralogico in occasione dell'inaugurazione del congresso (20 settembre); la copertura a volta si presenta finemente decorata, mentre per il resto la situazione corrisponde a quella attuale ad eccezione di un avanzamento della balaustra del primo livello nella zona centrale del lato minore, forse per ricavare un maggior numero di posti.

Per il Congresso degli Scienziati furono anche stampati dallo stabilimento tipografico di Gaetano Nobile due volumi dedicati a "Napoli e i luoghi celebri delle sue vicinanze" dove vari autori tra i quali Stanislao d'Aloe, Raffaele d'Ambra, Mariano d'Ayala, Cesare Dalbono trattano con ampiezza di particolari argomenti riguardanti la storia, la cultura e la bellezza del sito napoletano. Al museo furono dedicate alcune pagine ed Arcangelo Scacchi ebbe modo di descrivere la bellezza della sala per "l'eleganza ed aggiustatezza degli ornati e per la eguale distribuzione della luce, le quali cose sono sì bene amonizzate, che l'occhio non avrebbe nulla a desiderare se la volta fosse restituita al primo suo stato"; eppure la decorazione della volta rappresentata nella stampa prima citata certamente poteva ritenersi ancora decorosa specialmente se rapportata alle condizioni raggiunte negli anni successivi .

Nuove modifiche, seppur limitate all'allestimento interno, dovette subire il Museo mineralogico quando nel 1848 Errico Alvino e Francesco Saponieri ebbero l'incarico di predisporre la sala per le riunioni della Camera dei Deputati (23). Infatti fin dal mese di gennaio il Re Ferdinando aveva promesso la Costituzione e la legge elettorale aveva fissato l'apertura delle Camere dei Deputati e dei Pari per il successivo primo maggio; ma l'evolversi degli avvenimenti con le reazioni popolari, le barricate e gli scontri che portarono anche all'incendio di Palazzo Gravina fecero slittare l'apertura delle Camere legislative agli inizi di luglio. Tale apertura è rappresentata in una stampa esistente presso l'Archivio storico del Comune di Napoli: la legenda "Camera de' deputati, Napoli luglio 1848" e l'arredo perimetrale non lasciano dubbi sull'attribuzione; dal confronto delle due rappresentazioni (1845 e 1848) è possibile rilevare che ad appena tre anni di distanza il soffitto ha cambiato

completamente aspetto e sul perimetro sono dipinti rosoni e festoni delle province del Regno. Si notano, inoltre, i banchi a gradonata che nel lato posteriore raggiungono la balconata del primo livello e il tavolo presidenziale che domina l'intera sala.

Le riunioni delle Camere legislative si protrassero fino al marzo del 1849 quando il Parlamento fu sciolto e mai più convocato anche se la Costituzione non fu mai abolita. Nei mesi successivi la sala fu riportata alla originaria funzione con lo smontaggio dei banchi ed il ripristino degli armadi espositivi che dopo poco si arricchirono dei reperti vesuviani della collezione Monticelli acquistata nel 1851. Di questa collezione faceva parte un frammento di marmo rappresentante la testa di un satiro scolpito da Antonio Canova, contenente un grosso cristallo di quarzo (24).

Nuove importanti manifestazioni si tennero nella sala del Museo mineralogico il 15.12.1853 ed il 21.10.1860. Nel 1853 Nicola Lucignano, membro del Consiglio Generale della pubblica istruzione, recitò l'orazione commemorativa in occasione della distribuzione della medaglia con l'effigie di S. Tommaso d'Aquino scelto quale protettore dell'Università di Napoli; invece del 1860 la sala fu sede di uno dei dodici seggi per la votazione sull'annessione al Regno d'Italia. Anche questa manifestazione è rappresentata in una stampa a colori esistente presso la Società Nazionale Scienze, Lettere ed Arti (25).

Grazie alla costante azione di Arcangelo Scacchi nel 1862 il museo fu oggetto di un rilevante intervento di restauro che oltre ad interessare il ripristino del soffitto comportò anche la sostituzione del pavimento che si trovava in cattive condizioni. La scelta del tipo e del colore delle piastrelle fu particolarmente indovinata: delle fasce con fondo bianco e profilo di greca in nero racchiudono cinque campi a quadrati alternati con fondo verde e marrone; all'incrocio delle fasce perimetrali nove piastrelle formano lo stemma sabauda a vari colori.

Dopo l'unità d'Italia il Museo mineralogico, pur perdendo l'esclusività per la presenza di altri musei a nord dell'antico Regno di Napoli, poteva sempre ritenersi uno dei più importanti per la ricchezza delle collezioni e per le continue iniziative nel campo culturale. Infatti la nuova raccolta di cristalli artificiali donata da Scacchi all'Università riscosse molti apprezzamenti e meritò premi nelle Esposizioni di Londra del 1862 e di Parigi del 1867; inoltre il museo era sempre oggetto di visite di varie personalità tra le quali va ricordata quella dell'imperatore del Brasile, don Pedro II di Braganza, nel 1876.

L'anno dopo, il 1877, l'esigenza di ampliare l'esposizione dei numerosi reperti disponibili condusse alla sistemazione nel salone di nuove vetrine centrali; queste, pur non compromettendo l'aspetto estetico complessivo per la ridotta altezza, certamente incidevano sulla visione del pavimento che risultava frazionata dalla presenza delle

vetrine.

Nel 1884 il museo era sul punto di subire gravi conseguenze se fosse stato attuato un progetto che prevedeva la sopraelevazione dell'ex refettorio gesuitico con conseguente occlusione di tutte le finestre lato Mezzocannone; ciò avrebbe comportato la completa alterazione degli effetti di luce che simmetricamente investivano il salone. Fortunatamente ebbe parziale esecuzione con la sola demolizione, forse per motivi statici, del cosiddetto "tempietto" posto in corrispondenza del gesuitico "museo non terminato" nell'estremità verso il mare.

Con la morte di Arcangelo Scacchi nel 1893 finisce uno dei momenti più belli vissuti dalla struttura museale per le continue ed interessanti iniziative poste in essere dal suo direttore, di particolare valenza culturale sia a livello nazionale che a livello internazionale. I suoi successori, il figlio Eugenio Scacchi ed Emanuele Quercigh, dovettero assistere al progressivo decadimento del museo che a seguito del terremoto del 23 luglio 1930 subì il crollo del tetto e, quindi, la totale perdita del soffitto decorato, in quel momento ancora esistente anche se aveva perso molto della sua originaria bellezza per le continue e parziali riparazioni subite.

Dopo i lavori di rifazione del tetto eseguiti dallo speciale Ufficio costituito dopo il terremoto e con fondi assegnati da S.E. Castelli, il soffitto fu ripristinato senza decorazioni e senza i raccordi curvi perimetrali; la presenza di una copertura perfettamente piana e l'assenza di risalti cromatici influi negativamente sull'originario spazio architettonico che si presentò all'osservatore completamente trasformato ed appiattito. Soffitto che dovette essere nuovamente rifatto, ma sempre con le stesse caratteristiche, per i danni bellici subiti nel 1944 nelle fasi conclusive della seconda guerra mondiale; tra l'altro un bombardamento nel 1941 mandò in rovina la collezione di cristalli artificiali.

Il museo dal 1945 al 1958 fu completamente riorganizzato e sistemato dal prof. A. Scherillo con la collaborazione di A. Parascandola, E. Franco e R. Sinno e nel 1960, in occasione dell'inaugurazione del Complesso della Società Italiana di Mineralogia e Petrografia (SIMP), fu riaperto al pubblico.

Nel periodo dal 1960 al 1982 nel museo si è svolta una intensa attività scientifica e didattica come dimostrano le circa 100 visite guidate effettuate dal 1969, l'acquisizione di nuovi esemplari di particolare bellezza e la sistemazione di nuove collezioni specializzate come quella delle apparecchiature scientifiche; quest'ultima, realizzata tra il 1973 e il 1975 raccoglie tutte le strumentazioni mineralogiche di interesse scientifico e storico presenti nel soppresso Istituto di Mineralogia. Inoltre il museo nel 1968 è stato nuovamente sede del Congresso della SIMP ed ha partecipato alla costituzione della Associazione Nazionale dei Musei Scientifici sotto

l'egida dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

Nel 1982 la situazione all'inizio segnalata ha reso improcrastinabile la chiusura del museo per motivi di sicurezza e la redazione di un progetto di restauro per il recupero della funzionalità. Tale progetto e la conseguente esecuzione dei lavori di restauro, attuati nell'ambito degli interventi di adeguamento del complesso di via Mezzocannone 8 alla normativa sulla sicurezza (26), hanno consentito il ripristino dell'agibilità del museo e la riapertura al pubblico.

I citati lavori hanno riguardato innanzitutto il consolidamento statico della parete lato Mezzocannone ed il completamento del cordolo all'imposta del tetto; è stato, quindi, ripristinato il soffitto sostituendo la preesistente copertura piana con pannelli aventi la necessaria resistenza al fuoco, raccordati alle pareti perimetrali con elementi curvi. In tal modo è stato possibile riprendere le forme dello spazio architettonico così come risultante dai documenti iconografici rinvenuti nella preliminare fase di ricerca storica. E' stata anche riproposta con sagoma moderna la cornice posta in sommità delle scaffalature del secondo ordine, mentre sul soffitto semplici fasce monocromatiche richiamano lo spartito del sottostante pavimento; appare evidente che la scelta è stata operata tenendo nella dovuta considerazione le soluzioni riportate nelle antiche rappresentazioni del soffitto (vedi stampe del 1845 e del 1848) anche se al posto dei festoni e delle complesse decorazioni sono stati riproposti solo gli elementi essenziali.

Un'altra delicata operazione ha riguardato il ripristino del pavimento che, come si è detto, si trovava in condizioni molto precarie; infatti dopo un puntuale rilievo fotografico tutte le piastrelle sono state numerate in sito, smontate ad una ad una e poste in buste di plastica (27). Successivamente è stato rimosso l'incoerente sottofondo e sostituito da una soletta di conglomerato cementizio armata con rete elettrosaldata; si è proceduto poi alla pulizia delle piastrelle per eliminare tutte le incrostazioni derivanti dalla malta di allettamento ed alla ricomposizione ed incollaggio con speciali adesivi degli elementi rotti. In conclusione delle citate operazioni è stato rimontato il pavimento seguendo la numerazione iniziale ed è stato completato il restauro con la stuccatura della superficie mediante applicazione di un particolare impasto di colore neutro. E' interessante notare che sul retro delle piastrelle è riportato il nome della fabbrica (Colonnese di Napoli) e che in particolare su una è segnata la sigla AFS indicante probabilmente le iniziali dell'autore del disegno. La rimozione del massetto di sottofondo ha consentito anche il recupero di elementi del preesistente pavimento che sono stati, per quanto possibile, ricomposti; non tutte le piastrelle ritrovate sono riconducibili alla stessa matrice per cui può affermarsi che appartengono a pavimenti diversi: il disegno del primo forma una stella a sedici punte

delimitata da profili curvi in giallo che costituiscono separazione da altro campo con gigli neri su fondo bianco; analoghe piastrelle sono presenti nelle chiese di S. Antonio a Portalba e di S. Pietro a Maiella. Il disegno del secondo, invece, presenta motivi floreali e faunistici a vari colori (fondo bianco e decorazioni in giallo, verde, ble e marrone).

Sulle pareti libere del secondo ordine e negli squarci dei vani esterni è emersa una decorazione ottocentesca che ripete simmetricamente le colonne scanalate in legno del perimetro interno della balconata. In attesa di un futuro recupero ne è stato lasciato in vista un tratto in corrispondenza di una finestra verso via Mezzocannone, mentre la residua superficie è stata coperta con tinta uniforme e con caratteristiche tali da consentire la facile rimozione nel momento in cui si deciderà di effettuare il restauro.

Naturalmente sono stati sistemati anche i locali al contorno a cominciare dal corridoio di ingresso con volta lunettata che prima ospitava la collezione vesuviana ed oggi accoglie, in alcune librerie, vari volumi di interesse mineralogico. Prima di entrare nel salone del museo si passa attraverso il "vestibolo" dove è esposto un quarzo del Madagascar e prodotti vulcanici; nel salone, invece, si ammirano i due ordini della scaffalatura ottocentesca che contengono la collezione generale e, a metà sala, lo scrittoio e la sedia di Arcangelo Scacchi. Le collezioni vesuviana, campana e flegrea, infine, sono state sistemate nell'ultima sala: sulle pareti gli armadi e al centro le bacheche che consentono la visione dei vari reperti attraverso un percorso preliminarmente individuato; questa sistemazione non risulta essere pienamente soddisfacente in quanto queste ultime collezioni richiederebbero maggiore spazio, attualmente non disponibile.

E' auspicabile che col tempo si possa tendere ad un riaccorpamento dei musei storici dell'Università Federico II nella sede più antica e più prestigiosa senza la distruzione e la dispersione di un patrimonio unico. E' possibile ipotizzare che intorno al preesistente nucleo dei musei di Mineralogia e di Zoologia possano collocarsi anche i musei di Antropologia e di Paleontologia; la completa liberazione dell'antico corridoio con volta lunettata tra i musei di Mineralogia e di Zoologia consentirà il recupero della originaria funzione di collegamento e la destinazione delle stanze ivi prospettanti a strutture di supporto (direzione, ambienti per il personale e per servizi).

Gli altri due musei di Antropologia e Paleontologia potrebbero trovare idonea sistemazione nel piano sottostante dopo il trasferimento del dipartimento di Zoologia nella nuova sede a Monte S. Angelo; gli ampi spazi oggi occupati dalla biblioteca e dal museo didattico del citato dipartimento di Zoologia e l'ala in prosieguo possono senza difficoltà ospitare sia i musei sopracitati sia locali per mostre tematiche

temporanee. Infine l'ex refettorio gesuitico, oggi laboratorio di esercitazione del dipartimento di Chimica, dovrebbe anch'esso far parte del polo museale con funzione di sala per conferenze.

Comunque assume carattere di priorità il restauro del museo di Zoologia e relativa copertura, insieme al tetto del museo di Mineralogia che presenta ancora una copertura con lastre di eternit da sostituire con un più congruente manto di tegole. Certamente l'Università di Napoli, quale massimo organo culturale della città ed in linea con le scelte operate d'intesa con la Soprintendenza Generale agli interventi post-sismici e con gli indirizzi assunti da oltre un decennio, farà ogni sforzo, anche se ciò comporterà rinunce e responsabili sacrifici in termini di spazio, per pervenire al restauro di questo complesso monumentale ed al recupero di strutture di rilevante interesse storico ed architettonico.

Aldo Pinto, Ufficio Tecnico Centro Storico, Università Federico II, Via A. De Gasperi n° 55, 80138 Napoli.

NOTE

1. Per la storia del complesso gesuitico si rinvia ai seguenti saggi: M. ROTILI, *Il Cortile del Salvatore*, Roma 1955; M. ERRICHETTI, *L'architetto Giuseppe Valeriano (1542-1596) progettista del Collegio napoletano del Gesù Vecchio*, in Arch. stor. delle prov. napol., 1960; G. ALISIO, *Il Gesù Vecchio a Napoli*, in Napoli Nobilissima, vol. V (1966); M. ERRICHETTI, *L'antico Collegio massimo dei gesuiti a Napoli*, in Campania Sacra n° 7 (1976); A. PINTO, *Il complesso del Salvatore in Napoli: nuove Conoscenze storiche attraverso il restauro*, in Restauro n° 106 (1989).

In particolare il palazzo fu costruito intorno al 1470 da Carlo Carafa Conte di Airola con l'impiego di vari "quatroni di pietra viva" provenienti dal tempio di Augusto a Nola; da questi passò al figlio Gian Vincenzo che morì nel 1528 ed i suoi beni vennero confiscati in quanto ribelle e concessi ad Alfonso d'Avalos marchese del Vasto. Dovettero poi ritornare alla famiglia Carafa perchè a vendere il palazzo è Gian Tommaso, futuro marchese di S. Eramo (1569), figlio secondogenito di Antonio Carafa terzo Conte di Ruvo. Le figlie Silvia e Marzia furono molto devote ai Gesuiti e la somma ricevuta dal padre per l'acquisto del palazzo fu praticamente restituita alla Compagnia. Cfr. F. SCHINOSI - *Istoria della Compagnia di Gesù appartenente al Regno di Napoli*, Napoli 1706, vol. I pp. 72-76.

2. Cfr. P. SARNELLI, *Guida de' Forestieri*, Napoli 1685 p. 412 ed edizione del 1688 p. 480

3. Cfr. M. ERRICHETTI, *L'antico Collegio ...*, op. cit., p. 237.

4. Cfr. G. SIGISMONDO, *Descrizione della città di Napoli e suoi borghi*, Napoli 1788, Tomo II p. 64; V. DE MARTINI, *Introduzione allo studio di Paolo de Matteis*, in Napoli Nobilissima, vol. XIV (1975), p. 224; D. CONFUORTO, *Giornali di Napoli dal MDCXXIX al MDCIC*, a cura di N. Nicolini, Napoli 1931 vol. II pp. 298 e 319 - 320.

5. C. CELANO, *Delle notizie del bello, dell'antico e del curioso della città di Napoli*, seconda edizione corretta ed accresciuta, Napoli 1724, vol. III p. 145.
6. Cfr. M. ERRICHETTI, *L'antico Collegio ...*, op. cit., p. 238 nota 24.
7. Cfr. Nuova collezione di prammatiche del Regno di Napoli, a cura di Lorenzo Giustiniani, Napoli 1804, T. VI; Gazzetta Ufficiale 1.11.1777, pp. 695 - 696; F. STRAZZULLO, *Tutela del Patrimonio Artistico nel Regno di Napoli sotto i Borboni*, in Atti Accademia Pontaniana, vol. XXI (1972).
8. Cfr. L. DEL POZZO, *Cronaca civile e militare delle Due Sicilie sotto la dinastia borbonica dall'anno 1734 in poi*, Napoli 1857 e M.G. CASTELLANO LANZARA, *La casa del Salvatore in Napoli*, in Miscellanea di scritti vari in memoria di Alfonso Gallo, Firenze 1956.
9. Cfr. G. SIGISMONDO, op. cit., Tomo II pp. 64 - 65.
10. A.S.N., Ministero delle Finanze, fasc. 2666; nelle opere di trasformazione fu sicuramente impiegato materiale della preesistente biblioteca in quanto ancora oggi molte tavole di legno visibili nell'intercapedine del 1° ordine hanno impresso il marchio a fuoco dei Gesuiti. Per il Museo di mineralogia vedi: A. SCHERILLO, *La Storia del Real Museo Mineralogico di Napoli nella storia napoletana*, in Atti Accademia Pontaniana, vol. XV (1966).
11. A.S.N., Ministero dell'Interno 1° Inv., fasc. 970.
12. Cfr. A. ZAZO, *L'ultimo periodo borbonico*, in Per la Storia dell'Università di Napoli, Napoli - Genova 1923, p. 554 e A. SCHERILLO, op. cit., pp. 5 e 17; L. del Pozzo, nella Cronaca civile indica il 28.3.1801 come data di fondazione.
13. Per la situazione finanziaria del Regno e le vicende legate all'attività del Ministro Zurlo vedi P. PIERI, *Il Regno di Napoli dal luglio 1799 al marzo 1806*, in Arch. stor. prov. napol., 1926 - 27; C. DE NICOLA, *Diario napoletano dal 1798 al 1825*, Napoli 1906; P. COLLETTA, *Storia del Reame di Napoli dal 1734 al 1825*, Capolago 1834.
14. A.S.N., Ministero delle Finanze, f. 2666.
15. A.S.N., Casa Reale Amm.va 3° Inv. Maggiordomia, fasc. 125.
16. A.S.N., Ministero delle Finanze, f. 2666 e Casa Reale Amm.va 3° Inv. Maggiordomia, fasc. 153.
17. A.S.N., Ministero dell'Interno 2° Inv., fasc. 5064.
18. Cfr. V. FLAUTI, *Memorie critiche su la istruzione pubblica del Regno di Napoli dal principio del secolo corrente fino a nostri giorni per servire di norma ad una riforma necessaria di essa*, in Anecdota ad publicam eruditione spectantia post auctoris facta inter amicos evulganda, Napoli 1837, pp. 25 - 26.
19. Carmine Antonio Lippi denunciò la vendita dei "più belli e rari pezzi" da parte delle persone che dovevano custodirli per cui intorno al 1820 non "rimanevano neppur la metà dei minerali" contenuti nelle cinquanta grandi casse a suo tempo consegnate. Cfr. C.A. LIPPI, *Prime idee concernenti il miglioramento delle nostre istituzioni*, Napoli 1820, pp. 142-143.
20. Cfr. F. STRAZZULLO, *Documenti d'archivio*, in Napoli Nobilissima, vol. XII (1974), p. 65.

21. Vincenzo Flauti nelle sue memorie pubblicate postume critica ampiamente il progetto redatto dall'Ing. Cappelli per la costruzione del "gabinetto di Zoologia" ritenendolo molto superficiale e dispendioso"; formula, tra l'altro, una proposta alternativa, non accettata dal Ministro, che utilizzava prevalentemente gli spazi esistenti. Vedi V. FLAUTI, *Memorie critiche...*, op. cit., p. 264-268.

22. Cfr. L. DEL POZZO, op. cit. e G. DE' SIVO, *Storia delle Due Sicilie dal 1847 al 1861*, Roma 1863.

23. Cfr. *Giornale Costituzionale*, n° 75, 5 aprile 1848 e A. ZAZO, op. cit., p. 580.

24. Cfr. A. SCHERILLO, *Un lavoro del Canova nel Museo Mineralogico di Napoli*, in *Atti Accademia Pontaniana*, vol. VI (1956 - 57).

25. Cfr. A. ZAZO, op. cit., p. 584 e A. SCHERILLO, *Complementi alla storia del Real Museo Mineralogico*, in *Atti Accademia Pontaniana*, vol. XXVII (1978).

26. I lavori sono stati progettati dall'Arch. Aldo Pinto con la collaborazione dei tecnici Di Massimo, D'Agostino e Montisano ed eseguiti dalla Coop. Fortitudo nell'ambito delle opere di adeguamento alla normativa sulla sicurezza affidate in concessione alla Infrasad Progetti (oggi Infratecna).

27. Il restauro del pavimento è stato eseguito dalla "Coop. Nuovo Restauro" sotto l'alta sorveglianza del dott. Roberto Middione della Soprintendenza per i Beni Artistici e Storici di Napoli.

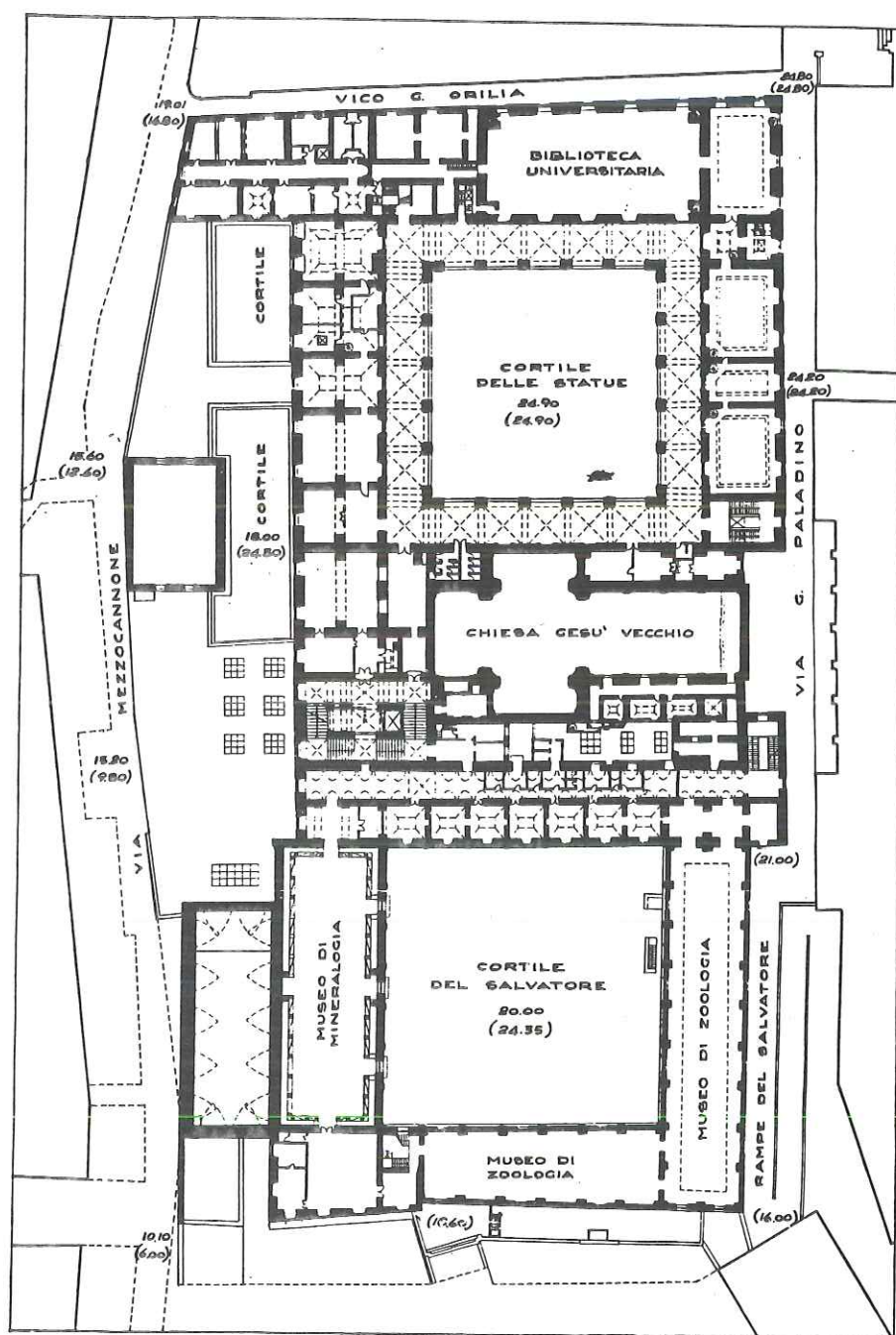


Fig. 1 Pianta dello stato attuale, a livello del Museo mineralogico, dell'ex Collegio massimo dei Gesuiti, oggi Università Federico II; con linea a tratteggio è indicato il tracciato della via Mezzocannone prima dei lavori del Risanamento e tra parentesi sono riportate le quote altimetriche preesistenti rispetto a quelle attuali.

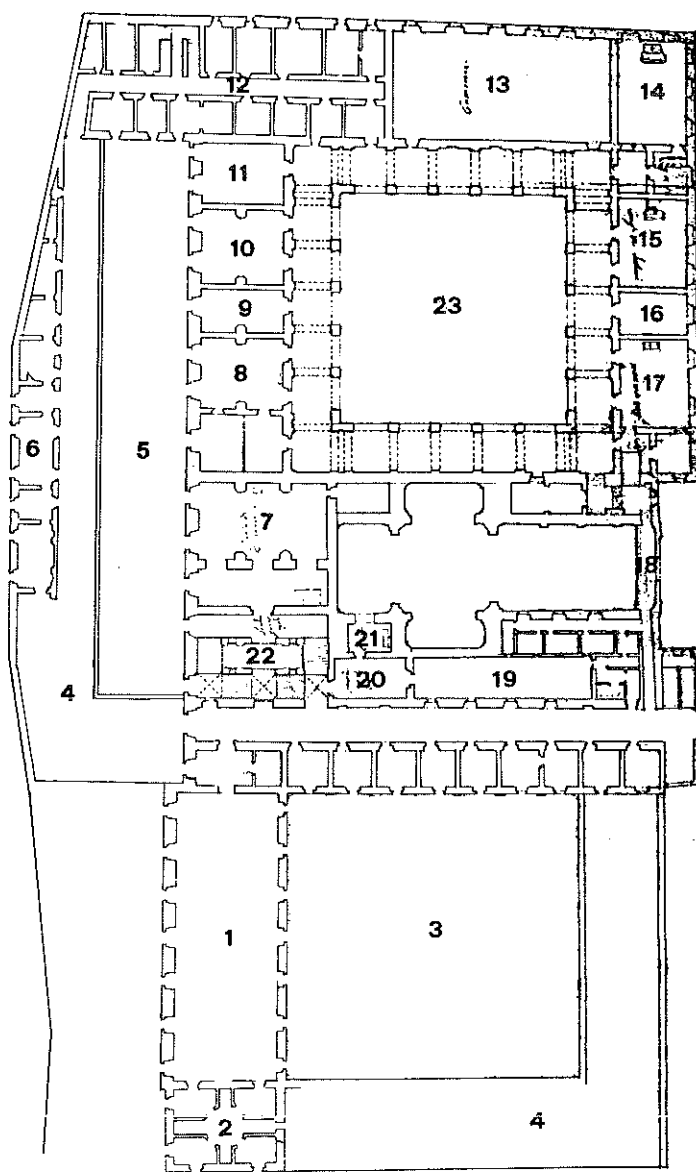
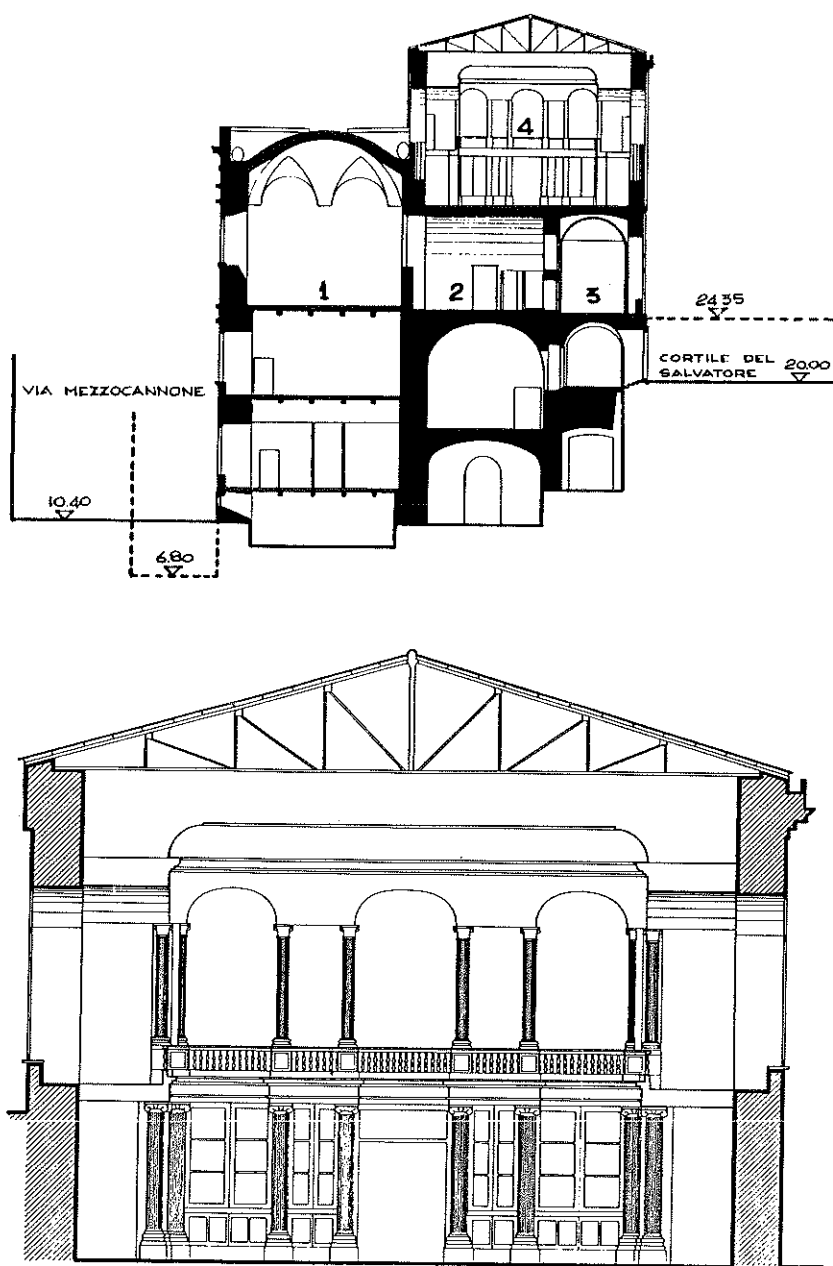
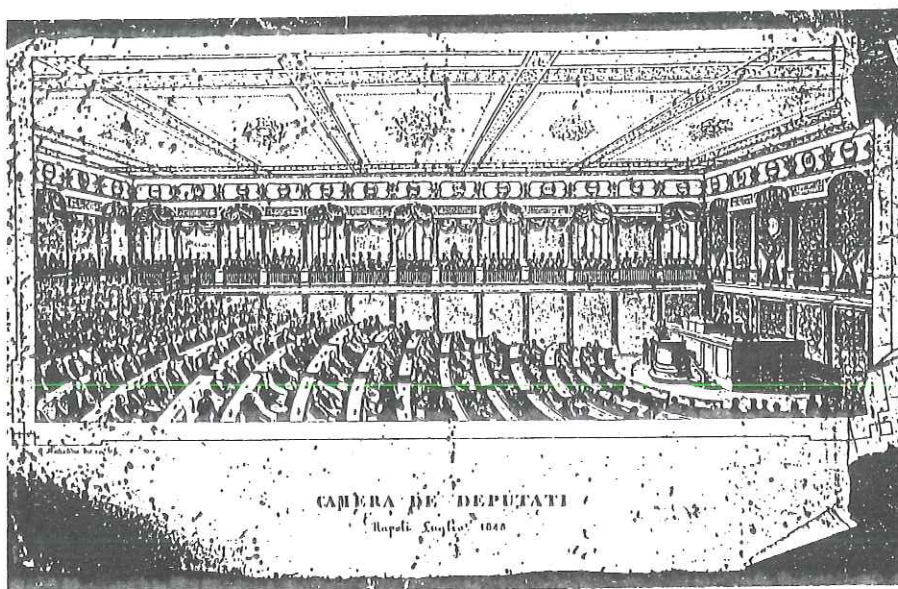
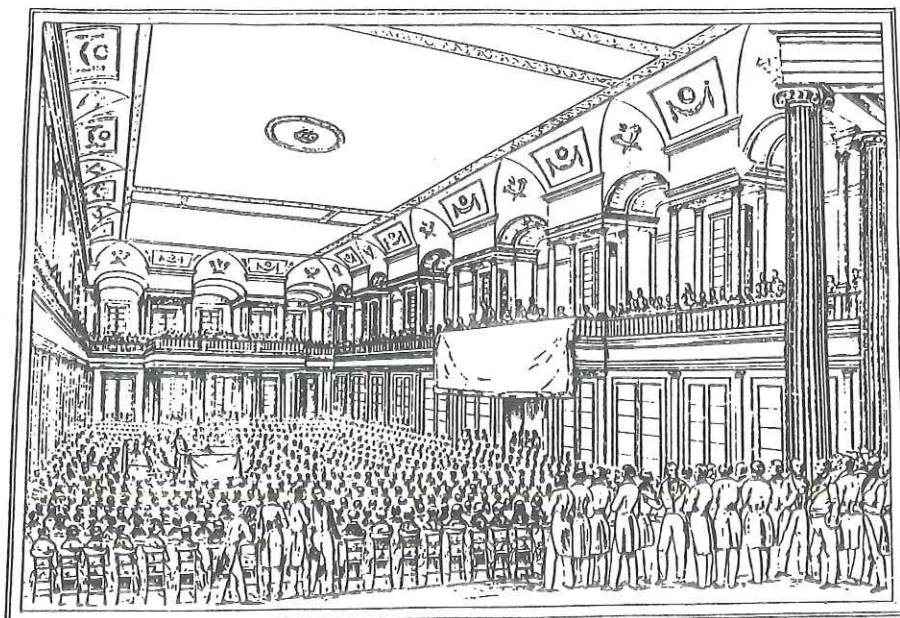


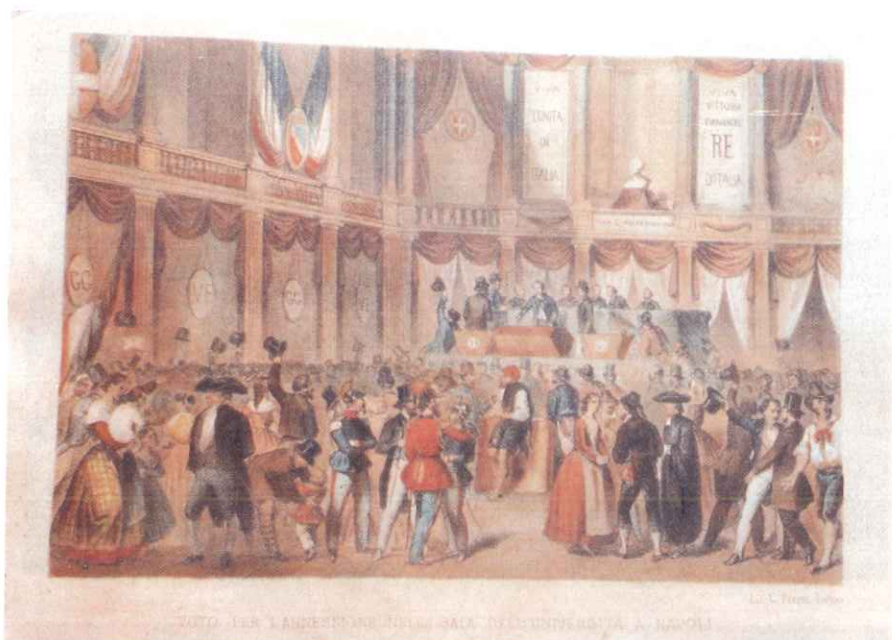
Fig. 2 Pianta settecentesca del piano primo del complesso gesuitico (ASN Cart. XIV/1bis). Si riportano le destinazioni riferite ai numeri aggiunti: 1. Biblioteca 2. Moseo non terminato 3. Cortile del giardino di porta dei carri 4. Astrago 5. Giardino sopra il forno 6. Speziaria 7. Stanza da ricreazione 8. Congregazione de' dottori 9. Scuola 10. Scuola e congregazione 11. Scuola 12. Infermeria 13. Camerone 14. Congregazione de' preti 15. Congregazione de' scolari 16. Scuola 17. Mercanti mag.ri 18. Orchestra 19. Cortiletto 20. Stanza per li vestiti 21. Cappella 22. Scala principale 23. Cortile de' studi.



Figg. 3-4 Sezioni trasversali del Museo mineralogico (con linea tratteggiata è riportata la situazione settecentesca): 1. Antico refettorio gesuitico (1684), oggi laboratorio di esercitazioni del dipartimento di Chimica 2. Antica "stanza per uso di cucina comestibili" 3. Porticato, originariamente aperto a livello dell'attiguo giardino, oggi sala bilance del dipartimento di Chimica 4. Antica biblioteca gesuitica costruita tra il 1685 e il 1688, trasformata nel 1801 in Museo mineralogico.



Figg. 5-6 Il salone del Museo mineralogico in occasione dell'inaugurazione del settimo Congresso degli Scienziati italiani (1845) e della seduta di apertura della Camera dei deputati (1848).



Figg. 7-8 Il salone del Museo mineralogico sede di uno dei Seggi per la votazione sull'annessione al Regno d'Italia (1860) e prima dei recenti lavori di restauro.



Figg. 9-10 Il Museo mineralogico dopo il terremoto del 1980 ed a lavori di restauro ultimati con la modifica apportata alla copertura.



Fig. 11 Particolare del salone del Museo mineralogico dopo i lavori di restauro.



Fig. 12 Lo scrittoio e la sedia di Arcangelo Scacchi.



Figg. 13-14 Il pavimento del salone del Museo mineralogico nella fase di restauro ed a lavori conclusi.



Figg. 15-16 La fase di catalogazione, pulizia ed incollaggio delle piastrelle del pavimento ottocentesco del Museo mineralogico; particolare del pavimento con lo stemma sabaudo.



Figg. 17-18 Elementi di pavimenti preesistenti, rinvenuti nel massetto di sottofondo delle piastrelle ottocentesche.

**Figg. 19-20-21 Stemma gesuitico
marchiato a fuoco sulle tavole in legno della
biblioteca, riutilizzate nella sistemazione a
museo; particolare dell'affresco ottocentesco
esistente sulle pareti del livello superiore del
salone (da restaurare); piastrella del pavimento
del salone con sigla AFS, probabili iniziali
dell'autore del disegno.**



LA SUCCESSIONE DOLOMITICA TRIASSICA DI MONTE COCUZZO (CALABRIA, CATENA COSTIERA)

Nota di Antonino IETTO (*), Edoardo PERRI (*) & Claudia SILVAGNI (*)

Presentata dal Socio Bruno D'Argenio
Adunanza del 6-11-1993

Riassunto

Nella catena Costiera calabrese, ad ovest di Cosenza, il monte Cocuzzo è noto in letteratura come rappresentativo di una successione dolomitica attribuita all'unità di Verbicaro *Auctt.*

I dati di nuova acquisizione, riportati nel presente lavoro, riconoscono, invece, una successione dolomitica, la quale, non solo non è comparabile con la successione dell'Unità di Verbicaro, quanto anche presenta caratteri bio e litostratigrafici del tutto nuovi e differenti da quanto finora noto nel Trias carbonatico in Appennino-Arco Calabro. Al monte Cocuzzo, infatti, viene riconosciuta una serie stratigrafica, in continuità di sedimentazione, caratterizzata da facies bacinali anossiche le quali evolvono con gradualità a facies torbiditiche e di breccie di scarpata (*apron* carbonatico) e superiormente a facies peritidali. In queste ultime, *patch-reefs* di margine biocostruito e fanghi di piana tidale, risultano eteropici a evaporiti passanti a probabili *mud-mounds*.

La successione in serie, come limite superiore d'età, si estende fino al Trias superiore (Norico probabile) per la presenza di *Griphoporella curvata* GÜMBEL nelle *patch-reefs*. Non risulta ancora definito il limite inferiore d'età, attribuibile al complesso bacinale anossico.

Sul complesso peritidale si appoggiano, con rapporto tettonizzato, le dolomie carnico noriche *auct.*, le quali nelle aree prossime dell'orogene Appennino-Arco Calabro, costituiscono la base affiorante delle potenti unità stratigrafico-strutturali carbonatiche meso-cenozoiche, sia per quelle in facies di piattaforma neritica calcareo-dolomitica che per quelle con facies a selce ascritte all'Unità di Verbicaro.

Al disopra delle dolomie carnico-noriche, nonché del complesso peritidale e di scarpata, tutti unitariamente coinvolti in una piega coricata est vergente, si sovrappongono tettonicamente i terreni cristallino-metamorfici delle Unità alpine. Da ciò, l'emergenza, in finestra tettonica, dei carbonati di Monte Cocuzzo, viene chiaramente confermata.

Parole chiave: Arco Calabro; Trias; bacini anossici; domini peritidali; Appennino meridionale.

Abstract

Mt. Cocuzzo is located in the Calabrian Coastal Chain, West of Cosenza (Southern Italy). Its dolomitic succession is known in the geological literature as representative of shelf-margin facies forming part of the Verbicaro Unit.

New data reported in this paper, on the contrary, allowed to recognize a succession not at all relationable with the Verbicaro Unit, since the studied sequences show bio-litostratigraphic characters quite different from the Triassic terrains of the carbonate Apennines. As a matter of fact, a continuous stratigraphic

succession have been recognized at Mt. Cocuzzo. It is formed, from the bottom, by basinal anoxic facies gradually evolving to turbiditic facies and slope breccias (carbonate apron). In the upper part, Late Triassic (probably Norian) in age - for the presence of *Griphoporella curvata* GÜMBEL - peritidal facies, characterized by patch reefs and tidal plain muds heteropic with evaporitic rocks passing to probable mud-mounds, have been observed. At moment, the age of basal terrains (Basinal Anoxic Complex) is not well defined.

Carnian-Norian dolostones lie on the peritidal complex above described. The contact, maybe of stratigraphic type in origin, is strongly disturbed by significant tectonic features as folds and shear bands. Anyway, the same triassic dolostones constitute the basal terrains of the Meso-Cenozoic carbonate successions of Southern Apennines, referred to both neritic carbonate (Alburno- Cervati-Pollino Unit) and chert-bearing limestones (Verbicaro Unit).

The succession here described forms an East-verging recumbent fold and is tectonically overlain by metamorphic units of the so-called Calabrian Arc. Therefore, the structure of Mt. Cocuzzo is confirmed to be a tectonic window.

Key words: Calabrian Arc; Trias; anoxic basin; peritidal domains; Southern Apennines.

(*) Dipartimento di Scienze della Terra, Università della Calabria, Arcavacata di Rende, (CS).

Lavoro eseguito e stampato con i fondi M.U.R.S.T. 40% (Responsabile A. Ietto).

Premessa

Nell'ambito del programma di ricerca avviato nel 1987, sulla revisione geologica del settore di giunzione Appennino calabro lucano-Arco Calabro, nella trascorsa primavera è stato esteso lo studi ai rilievi carbonatici di Monte Guono, Monte Cocuzzo e Monte Santa Lucerna, costituenti l'asse della Catena Costiera calabrese a ovest di Cosenza.

Questi rilievi e l'insieme degli affioramenti di carbonati adiacenti sono noti in letteratura (AMODIO-MORELLI *et al.* 1976) come rappresentativi di terreni di margine africano «emergenti», in finestra tettonica, al di sotto delle coltri cristallino-metamorfiche delle Unità Alpine o Unità Calabridi (OGNIBEN 1973).

Come successione stratigrafica, gli stessi rilievi carbonatici sono stati attribuiti ancora in AMODIO-MORELLI (op. cit.) all'unità stratigrafico-strutturale di Verbicaro, senza per altro definirne l'intervallo correlato e la relativa estensione cronologica.

Le prime risultanze del nostro studio, nel mentre confermano la posizione tettonica dei carbonati relativamente alle Unità Alpine, dimostrano, per contro, che le successioni stratigrafiche dei rilievi citati, e di età non più recente del Trias superiore, non possiedono alcun elemento di correlabilità con l'Unità di Verbicaro, almeno nei caratteri lito, bio e cronostatigrafici con i quali questa Unità è stata istituita (GRANDJACQUET & GRANDJACQUET, 1962) e descritta (BOUSQUET 1971). Oltre a ciò, le successioni da noi riscontrate nei rilievi citati, e in particolare al Monte Cocuzzo e Santa Lucerna, presentano caratteri di marcata specificità lito e biostratigrafica, nonché di diversità rispetto a quanto finora noto sulle successioni del Trias calcareo-dolomitico sia in Appennino che in Arco Calabro.

La significatività di tale riconoscimento e la particolarità delle facies bio e litostratigrafiche in successione, quali saranno descritte di seguito, motivano il presente lavoro, nonostante che l'analisi di dettaglio, in primo luogo paleontologica, di facies e strutturale e la definizione delle relative implicazioni paleogeografiche e tettonogenetiche, siano tutt'altro che prossime a una fase conclusiva.

La successione stratigrafica ricostruita trova il suo massimo d'estensione, con spettacolari affioramenti, al Monte Cocuzzo; mentre i due rilievi contigui di Santa Lucerna e Monte Guono sembrano costituire parti della stessa serie, sia pure a luoghi marcate da eteropie di facies.

Sotto l'aspetto paleontologico, la nuova serie ha fornito numerose e ricche località fossilifere, anche con forme di organismi costruttori probabilmente non ancora noti.

1 - La successione stratigrafica

Per i motivi espressi in premessa, la successione che si descrive è quella ricostruibile al Monte Cocuzzo, dal momento che lì presenta la massima estensione e gli affioramenti più significativi e meglio esposti. La stessa successione viene qui ricostruita su 5 segmenti principali: Serra Mezzana-Cozzo Aurulo, da q 800 a q 1200; Cozzo Aurulo-Monte Cocuzzo, da q 1200 a q 1542; Strada per Fiumefreddo-Colle del Crapio, da q 1040 a q 1200; Valle delle Pernici-Gli Scaglioni, da q. 800 a q. 1300; Valle Licetto-Pintura, da q 600 a q 1000 (vedere Carta Geologica di Fig. 1).

La serie completa risultante è quella di Fig. 2. In questa sono distinguibili 4 intervalli stratigrafici, ognuno litologicamente ben caratterizzato e definibile anche con criteri formazionali. Di questi intervalli, dal basso verso l'alto, i primi tre risultano in successione stratigrafica certa ed in continuità di sedimentazione. Il quarto intervallo, costituente la parte terminale della successione terminale della successione affiorante, succede normalmente al di sopra del terzo ma a questo si sovrappone con rapporto tettonizzato, pur mantenendo una sostanziale concordanza nella giacitura delle rispettive stratificazioni.

I quattro intervalli, vengono qui distinti in base alla loro posizione geometrica e ai toponimi degli affioramenti corrispondenti:

- complesso basale o di Serra Mezzana;
- complesso intermedio o di Monte Cocuzzo;
- complesso superiore o di Colle del Crapio;
- complesso terminale o delle «Dolomie carnico-noriche» *Auctt.*

1.1 - Complesso basale o di Serra Mezzana

Con uno spessore di poco inferiore ai 300 m, il complesso in parola risulta costituito da due intervalli formazionali in chiara continuità di sedimentazione e, dal basso verso l'alto, rappresentati rispettivamente da:

- a) un intervallo inferiore, affiorante per circa 80 m, a letto di una faglia normale ad alto angolo, costituito dalla successione di brevi sequenze, ognuna sui 7-8 m di spessore, le quali si ripetono ciclicamente e risultano formate da: strati centimetrici e decimetrici di dolomie nere, finemente saccaroidi, alternati da letti, da 1-2 cm a 40-50 cm, di sedimento nero pulverulento o debolmente addensato. Le prime analisi di tale sedimento danno la presenza di Carbonio minerale di origine organica per valori percentuali medi del 3,5% (in termini di Carbonio residuale).

Fig. 1 (Carta Geologica) - 1) Complesso bacinale anossico. 2) Complesso di scarpata. 3) Complesso peritidale. 4) Dolomie carnico-noriche. 5) Unità alpine cristallino-metamorfiche di copertura. 6) Limiti stratigrafici. 7) Superfici di collasso tettonico riattivanti i precedenti sovrascorrimenti. 8) Faglie dirette ad alto angolo. 9) Faglie trascorrenti. 10) Faglie inverse. 11) Sovrascorrimenti delle Unità alpine. 12) Assi anticlinali. 13) Assi sinclinali. 14) Orizzonte tettonizzato con pieghe tipo chevron. 15) Assi di pieghe coricate. 16) Giaciture degli strati, 10-45°, 45-70°, verticali, contorti.

Fig. 2 (Colonne Stratigrafiche) - 1) Megalodonti. 2) Coralli individuali. 3) Organismi costruttori non classificati, spugne probabili. 4) Coralli coloniali. 5) Bivalvi fissati in posizione di vita. 6) Alghe dasycladacee. 7) Spugne e altri organismi incrostanti. 8) Lenti conchigliari -lumachelle-. 9) Stromatoporidi. 10) Alghe *incertae sedis*. 11) Dolomie carnico-noriche. 12) Dolomie a cavità, tipo *Stromatactis*. 13) Fanghi nodulari varicolori. 14) Carbonati evaporitici a piccoli cristalli. 15) Carbonati evaporitici a grossi cristalli. 16) Fanghi dolomitici rossi. 17) Fanghi dolomitici neri. 18) *Patch-reefs*. 19) Breccie ad elementi piatti. 20) Breccie stratoidi a varia granulometria. 21) Slumps. 22) Strati dolomitici gradati. 23) Dolomie grigie saccaroidi. 24) Dolomie grigie nodulari. 25) Livelli neri carboniosi dei cicli basali. A-A' Successione Serra Mezzana-Cozzo Aurulo; B-B' Successione Cozzo Aurulo-Monte Cocuzzo; C-C' Successione strada Cosenza/Fiumefreddo- Colle del Crapio; D-D' successione Valle delle Pernici-Gli Scaglioni; E-E' Successione Valle Licetto-Pintura.

FIG. 1 | CARTA GEOLOGICA SCHEMATICA

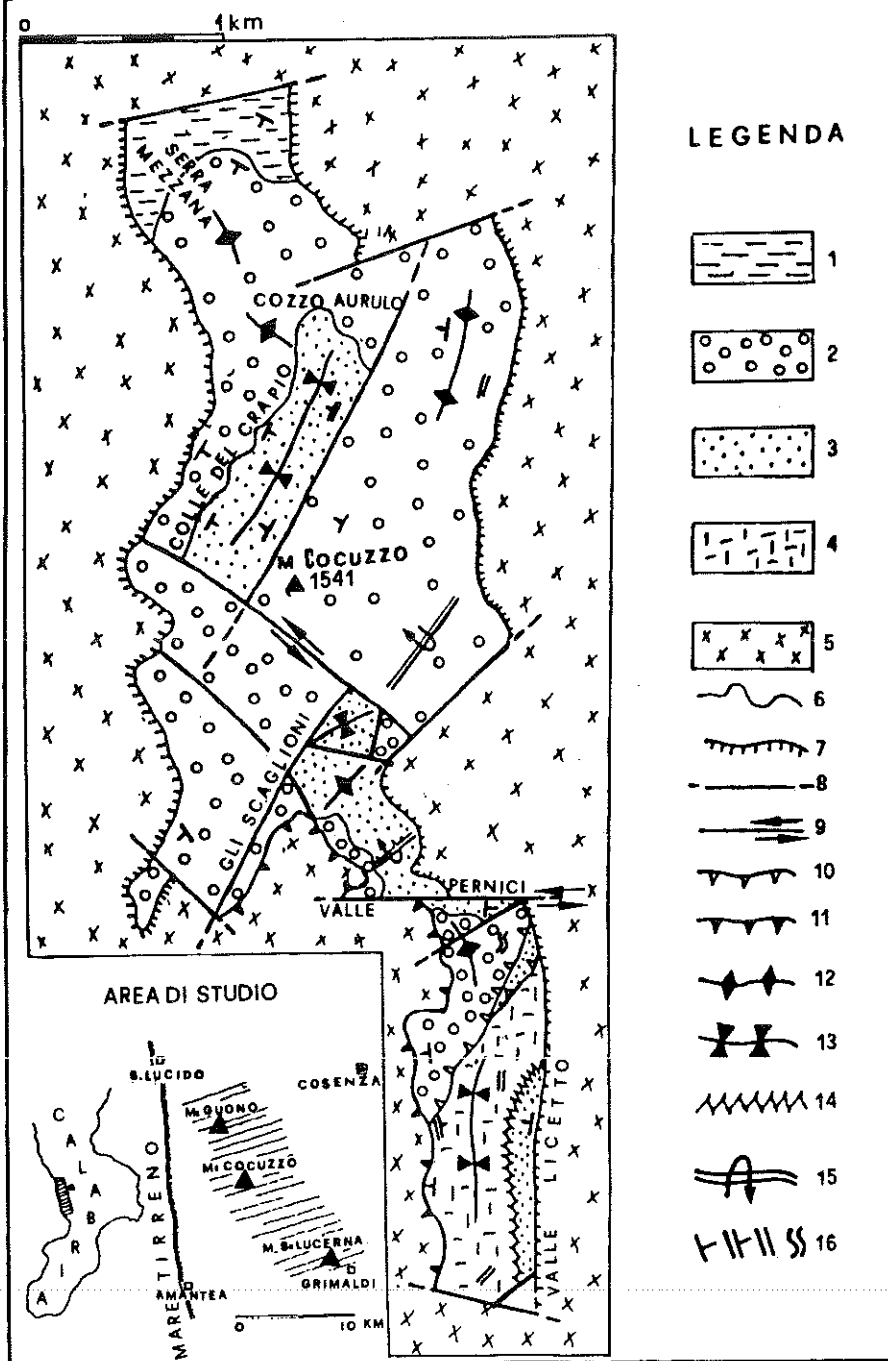
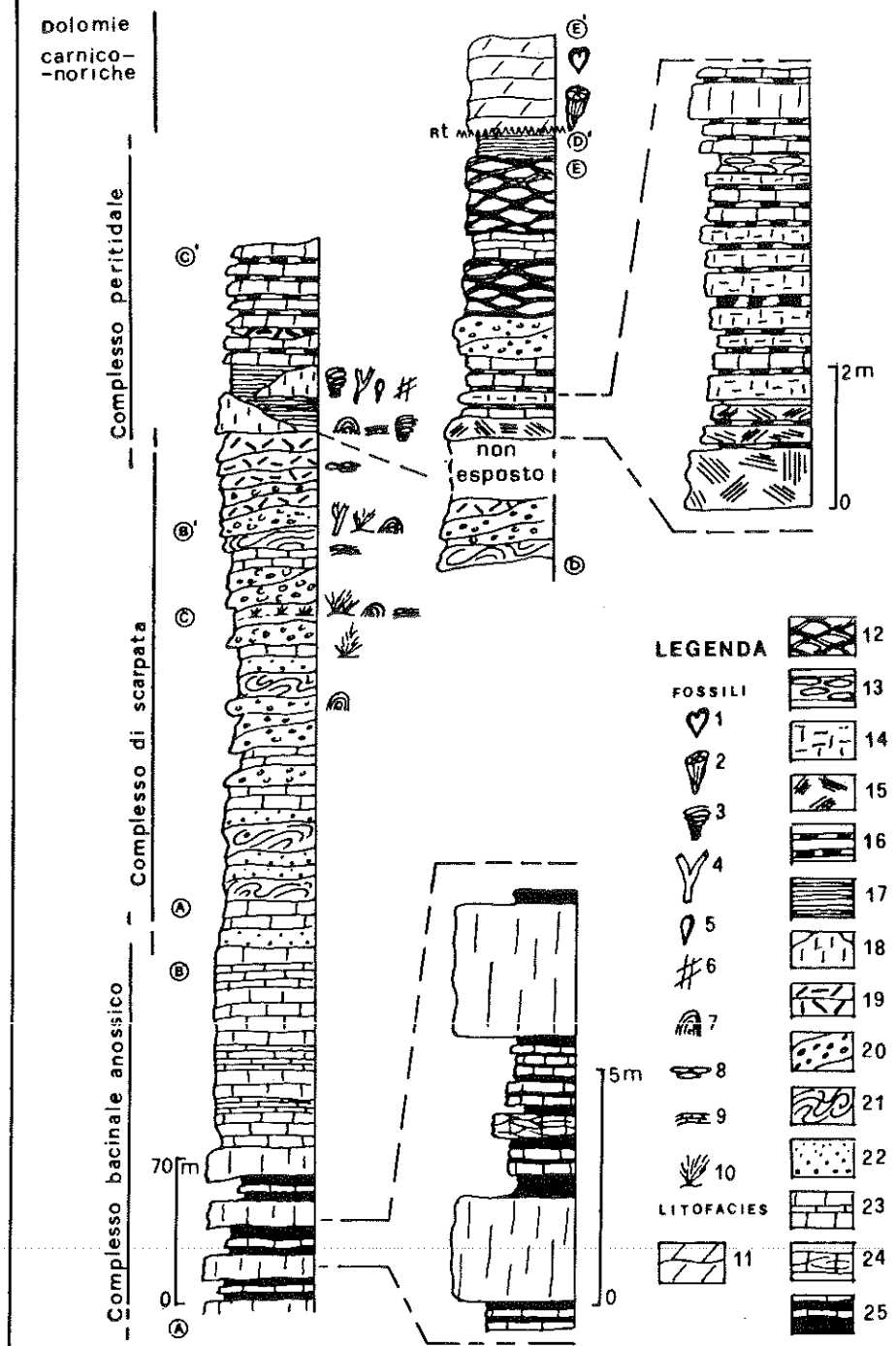


FIG. 2 COLONNE STRATIGRAFICHE



Dai caratteri generali descritti, la posizione inferiore dell' intervallo basale o di Serra Mezzana, viene da noi interpretata come rappresentativa di sedimentazione ciclica in zona bacinale a circolazione limitata e condizioni favorevoli a processi naftogenici (JENKINS 1986);

- b) sull'ultimo banco dolomitico che chiude la sequenza ciclica in affioramento, si ritrovano strati di dolomia grigio-nerastra, spessi sui 20-30 cm e non più intercalati da materiale nero pulverulento. Inizia così, e si estende per uno spessore di circa 200 m, una successione formata esclusivamente da dolomie grigie ben stratificate. Gli strati presentano di norma laminazione interna piano-parallela, di spessore subcentimetrico, posta in evidenza dalle variazioni di tono del colore, da grigio al nero. Nella successione, la stratificazione regolare ed uniforme viene occasionalmente interrotta da pacchi lastroidi, sempre di dolomia grigio-nera finemente saccaroide, di spessore massimo osservato sui 2 m. Ulteriore osservazione di terreno è quella di una generale tendenza del litotipo ad assumere, col risalire della successione, un colore più chiaro, una riduzione della laminazione e un aspetto chiaramente saccaroide ma sempre su valori submillimetrici.

1.2 - Complesso intermedio o di Monte Cocuzzo

Con evoluzione graduale e sempre ben esposta in affioramento, alle dolomie laminate grigie compaiono intercalate, sempre con maggiore frequenza, strati dai 20 ai 50 cm di calcareniti gradate, con caratteri di torbida distale, dolomitizzate e di colore grigio chiaro. Agli strati gradati si associano, con graduale aumento della frequenza, strati e banchi fino a 4-5 m di fanghi dolomitici vistosamente «slumpizzati». Nello spazio stratimetrico di circa 100 m, agli *slumps* ed alle torbide sottili, iniziano ad associarsi, fino a divenire prevalenti, strati e banchi di brecce, da sottili (clasti fino a 6-7 cm) a grossolane. In queste ultime, le dimensioni dei clasti raggiungono sovente diametri superiori al metro e, in tal caso, risultano formati da frammenti bioclastici quasi sempre già saldati da cemento spatico. Tra le forme organiche, presenti nei bioclasti, prevalgono nettamente quelle riferibili a spugne e subordinatamente a Alghe, Coralli coloniali, dendroidi ed individuali, Stromatoliti (in piccoli ammassi) e rari Bivalvi, per lo più Ostreidi. Sono presenti, altresì, strutture riconducibili a Stromatoporidi e forme incrostanti di incerta attribuzione. Lo studio paleontologico di tali forme è, però, in fase appena iniziale.

Negli ammassi stratoidi delle bioclastiti e brecce che, nella successione di Monte Cocuzzo, raggiungono spessori sui 200 m, si rinvencono, intercalati con una certa frequenza, strati di spessore irregolare dai 30-40 cm a oltre il metro, di dolomia saccaroide grigio chiara, nei quali il sedimento appare pressoché «sostenuto» dalla fitta e sottile ramificazione di «cespi» di organismi in posizione di crescita ed irregolarmente sovrapposti. Questi organismi si presentano come steli cilindrici lunghi fino a 3-4 cm, con sezione di 0,5-1 mm, i quali si irradiano su una base ristretta e, duplicando verso l'alto, tendono a formare strutture arborescenti alte fino a 14-15 cm. Dalle forme esterne, osservabili sulla roccia e dai pochi elementi della morfologia interna che la intensa dolomitizzazione consente ancora di intravedere su sezione sottile, detti organismi ammettono una loro confrontabilità con Alghe tipo *Cladogirvanella*. Proprio la culminazione topografica di Monte Cocuzzo è costituita da una di questi grossi strati, i quali, ove si ritrovano, sembrano «saldare» gli accumuli delle sottostanti brecce.

I banchi di bioclastiti a grossi elementi, sono costituiti, a luoghi (Cozzo Aurulo e Colle del Crapio) e per spessori stratimetrici massimi finora rilevati sui 40-50 m, da strati o banchi sui 120-130 cm, di «brecce ad elementi piatti» (*edgewise conglomerates* o *flat pebble conglomerates*, per gli Autori di lingua inglese), nei quali però gli elementi bioclastici risultano alquanto scarsi e di dimensioni ridotte. Gli «elementi piatti» che caratterizzano le brecce si presentano, sulla faccia di strato, con forma rettangolare fino a massimi misurati di 4-5 per 20-25 cm e risultano corrispondere alle sezioni di piastrelle irregolari di fango dolomitico nerastro, paleontologicamente finora sterili.

Laddove risultano esclusive o nettamente prevalenti le brecce ad elementi piatti, a queste si intercalano strati fino a 70- 80 cm di fanghi dolomitici grigi, «slumpizzati».

L'insieme del Complesso intermedio o di Monte Cocuzzo, nelle sezioni finora controllate, lì dove è stratigraficamente limitato a letto ed a tetto dagli altri complessi distinti, presenta uno spessore massimo sui 350 m.

L'evoluzione litostratigrafica della successione ora descritta, da termini torbidity distali a bioclastiti e brecce a grossi elementi, a nostro parere, porta ad individuare un complesso di scarpata in fase di progradazione (BOSELLINI, 1984; KENDALL, 1981).

1.3 - Complesso superiore o di Colle del Crapio

A Colle del Crapio, sul versante occidentale di Monte Cocuzzo, alle «brecce a elementi piatti» si sovrappongono corpi mammellonari, massicci o mal stratificati, di spessore fino a 15-20 m per 70-100 di lunghezza, in gran parte formati da strutture scheletriche di organismi in posizione fisiologica o solo parzialmente dislocati.

Forma, dimensioni e presenza di organismi costruttori in posizione di vita, inducono ad interpretare questi corpi mammellonari come *patch-reefs*.

Tra gli organismi costruttori nelle *patch-reefs*, le forme prevalenti e talora esclusive, sono attribuibili a Poriferi, Alghe e varie forme incrostanti. Meno abbondanti i Coralli, rappresentati per lo più da ammassi coloniali con coralliti sottili (0.5 cm in genere), individuali e dendroidi. La forma più rappresentativa è, però, costituita da un organismo costruttore probabilmente non ancora noto. Si tratta di una forma a cono rovescio, internamente cava e, all'esterno, strutturata a lamine subparallele. Gli organismi, i quali raggiungono altezza fino a 17-18 cm e larghezza massima sui 6-7 cm, si presentano in genere fittamente accostati e talora concresciuti, tali da formare ammassi consistenti fino e oltre il metro cubo. Alle prime analisi, tale forma viene ricondotta a Poriferi a scheletro calcareo.

Lateramente ai corpi biocostruiti e direttamente sulle «brecce ad elementi piatti» (versante ovest di Cozzo Aurulo) si appoggiano, con rapporto *on-lap*, dolomie nere poco tenaci, saccaroidi e facilmente disgregabili, in strati sottili mal definiti (dai 5 ai 20-25 cm), prive di bioturbazioni evidenti e finora paleontologicamente sterili. Questi fanghi dolomitici neri si estendono, sul versante occidentale di Monte Cocuzzo, fino a ricoprire totalmente due delle *patch-reefs* di Colle del Crapio, sormontandole per almeno 15-20 m, mentre su una terza risalgono fino a sfiorarne la culminazione esposta, per poi evolvere in altra litofacies.

I fanghi dolomitici neri, infatti, dopo spessori massimi rilevati sui 35-40 m, tendono ad assumere colore più chiaro, maggiore compattezza e stratificazione piuttosto regolare sui 20-40 cm. Su queste dolomie nere e, a luoghi, direttamente sugli ammassi stratoidi biocostruiti, si appoggia in concordanza una successione caratterizzata da livelli centimetrici difanghi rosso mattone con caratteri da *mud-*

cracks, alternanti strati di dolomia grigia finemente saccaroide. Questa successione, osservabile con continuità per almeno 1 km sul versante occidentale di Monte Cocuzzo, ricopre uniformemente tutto l'allineamento delle patch-reefs e dei fanghi dolomitici neri. La successione presenta carattere ciclico, in quanto un livello rosso a *mud-cracks*, con spessori da 1-2 a 10-15 cm, si alterna con regolarità ad uno strato di dolomia con spessori da 10 a 50-60 cm.

Gli strati dolomitici dell'alternanza, privi finora di fossili macroscopici, là dove raggiungono gli spessori maggiori, presentano talora accenni a fenomeni di *shump*.

I *mud-cracks* rossi costituiscono, a luoghi, accumuli lenticolari brecciati, con spessori fino a 30-35 cm e risultano sempre limitati a letto e a tetto da strati di dolomie saccaroidi. In altre condizioni, frammenti piatti di *mud-cracks* tendono a costituire la porzione prevalente di ammassi conglomeratici di spessore osservato fino a 2 m, nei quali gli altri clasti sono rappresentati da fanghi dolomitici neri e bioclastiti (probabili accumuli di canali tidali in condizione di elevata energia - SHINN et al. 1969; SHINN, 1983).

Sul versante a monte di Colle del Crapio, l'intero intervallo, così come descritto, dalle *patch-reefs* ai *mud cracks*, presenta in affioramento uno spessore complessivo valutabile sui 150 m minimo.

Nel corpo di una delle *patch-reefs*, sono stati rinvenuti livelli algali con forme ben conservate e poco dolomitizzate attribuibili a *Griphoporella curvata* GÜMBEL (determinazione del Prof. F. Barattolo, Università di Napoli). Ciò permette di riferire il complesso in esame al Trias Superiore (Norico probabile).

La successione, relativa al Complesso superiore o di Colle del Crapio, viene da noi interpretata come espressione sedimentaria tipica di ambiente peritidale, nella quale ammassi biocostruiti e depositi di laguna protetta vengono progressivamente ricoperti da depositi ciclici tidali e supratidali (sequenza a *mud cracks*) (GINSBURG, 1975).

Considerando la ciclicità della successione a *mud-cracks* e il suo appoggio stratigrafico, prima sulle dolomie nere e quindi sul Complesso di scarpata, quali validi elementi di correlazione, sul versante orientale di M. Cocuzzo, sono state rilevate diverse successioni eteropiche, tutte con appoggio stratigrafico sul complesso sottostante, delle quali si descrive di seguito quella più significativa e meglio esposta. Questa successione, affiorante lungo Valle delle Pernici (Fig. 1), è schematizzata in Fig. 2, presenta notevoli diversità rispetto a quella di Colle del Crapio. Lo studio comparato di tutte le successioni peritidali rilevate potrà, pertanto, consentire la definizione paleogeografica dell'intera area deposizionale qui ricostruibile, la quale, a nostro parere, va ricondotta ad una zona di margine notevolmente articolata ed alla relativa piana tidale.

La successione di Valle delle Pernici, viene caratterizzata da:

- a) alla base affiorante, presenta alternanza di strati formati esclusivamente da grossi cristalli di calcite (90% calcite, più pelite ed altre impurità), ai quali si intercalano con regolarità ciclica livelli a fanghi rossi;
- b) l'intervallo basale cristalli-fanghi rossi viene gradualmente sostituito da cicli dolomie-fanghi rossi (Fig. 2);
- c) i fanghi rossi presentano raramente tracce di disseccamento e, nei primi 50 m di successione, sono rappresentati anche da banchi spessi fino a 2 m, nei quali il litotipo assume colori vivaci, dal verde al viola, e struttura nodulare. Lateralmente, nello stesso spessore di un banco di 1.5 m, i fanghi varicolori nodulari vengono troncati da ammassi di breccie con clasti sui 7-8 cm di dolomia grigia e «piastrelle» di fanghi rossi;

- d) a metà della successione, si rileva un intervallo sui 30-40 m costituito essenzialmente da ammassi malstratificati di brecce, nelle quali sono sempre presenti clasti di fanghi rossi. L'intervallo in parola viene chiuso da un pacco di strati, spesso sui 6-7 m, costituito da un'alternanza di dolomie gradate e fanghi rossi;
- e) la porzione superiore della successione di Valle delle Pernici è caratterizzata, per circa 90 m di spessore, da ammassi stratoidi di «dolomie a cavità e lenti di calcite» tipo *stromatactis* (BATHURST 1959; 1980; 1982; JADOUL & FRISIA 1988), interrotti, dopo circa 10 m, da un intervallo, spesso 4 m, di dolomie-fanghi rossi in sequenza ciclica e, dopo altri 25 metri, da un secondo intervallo spesso 17-18 m, di dolomia grigia saccaroide. Questa dolomia, ben stratificata, è priva di interstrati rossi ed è caratterizzata da sottili filamenti neri («dolomia a capelli», la denominazione finora usata) di probabile origine organica (origine algale? - GEBELEIN & HOFFMAN 1973; HARDIE 1977).
Le «dolomie a *stromatactis*» sono costituite da un deposito mal stratificato, dove un fine sedimento dolomitico avvolge cavità riempite da calcite. Queste cavità si raccordano sovente ad interstrati formati, anch'essi, da grossi cristalli verticali di calcite, spessi fino a 10 cm. Le cavità formano, a volte, piccole cupole alte fino a 12-13 cm e larghe circa il doppio, con base piuttosto appiattita. In queste cupole, i cristalli di calcite si originano dalle volte e spesso costituiscono come una serie di rivestimenti concentrici emisferici; in tali casi è evidente una struttura geopetale, quale probabile riempimento di originarie cavità disposte parallelamente alla giacitura degli strati (BATHURST, 1982). Le cavità, in altre condizioni si presentano, invece, come grappoli di grosse carie (3-4 cm) in un tessuto formato da lamine di calcite, in piccoli cristalli, diversamente orientate. Alla base degli ammassi calcitici, per lo più di quelli a cupola, si riconoscono spesso forme e calchi spatizzati riconducibili a organismi ramificati. In termini di apporto litogenetico, il rapporto quantitativo tra sedimento dolomitico e ammassi calcitici è pressoché pari a 1 o addirittura v'è, in alcuni livelli, una prevalenza dei volumi a calcite. Le frazioni di sedimento si presentano raramente più spessi di 6-7 cm, là dove ramificano attraverso i volumi cavi a calcite. Raggiungono, invece, spessori maggiori, fino ai 15-20 cm, laddove assumono aspetto stratoide e intercalano lamine a grossi cristalli e dove si presentano di norma attraversate da sottili croste parallele di probabile origine organica, emergenti dallo strato per erosione differenziale. Dell'intervallo in parola, uno studio di maggiore dettaglio potrà definire le giuste condizioni di sedimentazione. Al momento, è tuttavia nostro parere che «le dolomie a *stromatactis*» siano rappresentative di un *mud-mound* (JAMES, 1983; WILSON 1974; 1975; ENOS & PERKINS, 1979; STANTON & FLUGEL 1989).
- f) la successione di Valle delle Pernici e, quindi, anche l'intervallo superiore a *stromatactis*, viene chiusa da fanghi dolomitici neri, stratificati ed evolventi, nello spessore di circa 15 m, da sedimento disaggregabile tenero a dolomie tenaci sottilmente saccaroidi.

1.4 - Complesso terminale o delle «Dolomie carnico-noriche» Auctt.

Sul versante orientale di M. Cocuzzo, e precisamente sulla destra orografica di Valle Licetto (Fig. 1), alle dolomie nere che chiudono la successione peritidale di Valle delle Pernici, seguono strati e banchi di dolomie grigie o biancastre, saccaroidi, molto fossilifere, ivi affioranti per uno spessore non superiore agli 80-100 m. Le

forme fossili più diffuse sono ascrivibili a Megalodontidi, i quali raggiungono dimensioni fino a 15 cm e, principalmente, a grossi coralli, per lo più individuali (alcuni esemplari risultano confrontabili con *Thecosmilia* e *Margarosmilia*). Sono state rinvenute anche alcune forme di gasteropodi confrontabili con *Worthenia*. Gli stessi, identici, livelli fossiliferi, specie quelli a grossi coralli, sono stati da noi rinvenuti anche nelle «dolomie carnico-noriche» *auct.* (BOUSQUET et al., 1978) al M. Montea (costone di Schiena dell'Asino, nei pressi di Sant'Agata d'Esaro) e al M. Sirio in destra alla valle del fiume Lao, presso Papasidero. Analogamente, livelli a grossi Megalodonti, del tutto simili a quelle delle dolomie di Valle Licetto, li abbiamo ritrovati ancora al M. Montea poco al di sopra dei livelli a Coralli e al M. Cerviero, presso Mormanno, dove, però, si collocano in una successione caratterizzata anche da livelli a *Worthenia* e piccoli lamellibranchi, tra i quali: *Gervilleia* sp, *Cassianella* sp, *Avicula* sp (IETTO et al., 1992; IETTO & BARILARO, 1993).

Per le dolomie di Valle Licetto, sovrastanti i termini del complesso peritidale, è pertanto proponibile, a nostro avviso, una correlabilità con le dolomie di Monte Montea, Monte Sirio e Monte Cerviero; vale a dire una correlabilità con le «dolomie carnico-noriche» *auct.* Ciò comporta che le dolomie di Valle Licetto sono da ascrivere a quel complesso dolomitico del Trias superiore, il quale in Appennino meridionale e in Arco Calabro costituisce la base stratigrafica finora nota delle potenti serie calcareo-dolomitiche di piattaforma (Unità Alburno-Cervati in D'ARGENIO et al., 1973) nonché delle serie in facies di transizione (Unità di Verbicaro *Auctt.*), tutte estese stratigraficamente dal Trias al Cretacico.

A Valle Licetto, il passaggio tra le dolomie nere del complesso peritidale e le dolomie chiare a grossi Coralli si presenta tettonizzato per la presenza di pieghe a geometria tipo chevron, est-vergenti, le quali coinvolgono gli ultimi 7-8 m della sequenza delle dolomie nere. La giacitura d'insieme delle dolomie nere non deformate e dei grossi strati a Coralli e Megalodonti è, però, del tutto concordante e, nella fascia di passaggio, non si rilevano altri elementi deformativi significativi. Le dolomie a Coralli di Valle Licetto presentano, inoltre, intervalli irregolari con ricristallizzazione a marmi, ma con perfetta conservazione delle tracce fossili.

2 - Altri affioramenti

I rilievi contigui alla dorsale di M. Cocuzzo e cioè i rilievi culminanti con la cima di M. Santa Lucerna, a sud presso Grimaldi, e con la cima di M. Guono, a nord presso Falconara Albanese, tutti noti come una successione di affioramenti, in finestra tettonica, dell'Unità di Verbicaro sormontata dalle coltri delle Unità Alpine (AMODIO-MORELLI et al, 1976), risultano, invece, costituiti da porzioni, più o meno estese, della serie di M. Cocuzzo, le quali vengono di seguito indicate.

2.1 - Gruppo di M. Santa Lucerna

Il rilevamento di questo piccolo gruppo montuoso, per la parte finora completata, circa l'80%, ha messo in evidenza solo affioramenti del «complesso di scarpata» e del «complesso peritidale» della serie di M. Cocuzzo.

In alcuni grossi strati di dolomie grigio scure, intercalate alle brecce e bioclastiti di scarpata, sono stati rinvenuti Bivalvi a guscio sottile riconducibili a *Mysidioptera* sp.

Al M. Santa Lucerna, il complesso peritidale di M. Cocuzzo è rappresentato, negli affioramenti finora controllati, da dolomie grigie in ammassi stratoidi, sormontati da dolomie nere lastroidi con rapporto di tipo *on-lap* (cava Silvagni presso l'abitato di Potame). Le dolomie massicce o stratoidi, affioranti per spessori massimi di 15-20 m, si presentano ricchissime di organismi ramificati (probabili Chetetidi), Stromatoporidi e varie altre forme problematiche. Sono presenti, altresì, piccoli bivalvi di tipo *Pinna* in posizione vitale. Anche questi ammassi dolomitici stratoidi, ricchi di organismi costruttori, vengono da noi interpretati come *patch-reefs*, pur se, come tali, risultano meno definiti rispetto a quelle di Colle del Crapio.

Sia nel complesso di scarpata che in quello peritidale, al M. Santa Lucerna sono presenti, occasionalmente, livelli irregolari ricristallizzati, d'aspetto marmoreo rosati, senza però obliterazione dei resti fossili.

2.2 - Gruppo di Monte Guono

Al M. Guono e nei rilievi adiacenti sono stati finora rinvenuti solo affioramenti correlabili con le «dolomie carnico-noriche» di Valle Licetto.

Affioramenti confrontabili con i termini del «Complesso di scarpata» della serie di M. Cocuzzo risultano alquanto limitati e comunque di dubbia correlabilità per mancanza delle bioclastiti e relative biofacies.

Il rilevamento del gruppo di M. Guono è, però, ad oggi, quello meno avanzato di tutta l'area di studio.

3 - Lineamenti tettonici

Come premesso, è oggetto principale del presente lavoro l'esposizione dei lineamenti lito e biostratigrafici della serie affiorante al M. Cocuzzo, dato il carattere di novità che la stessa riveste nelle conoscenze del Mesozoico dell'Appennino.

Con lo stesso criterio di preliminarità, si ritiene tuttavia cosa utile esporre alcuni degli elementi tettonici essenziali che, alla luce dei dati disponibili, caratterizzano lo stesso gruppo montuoso. La dorsale di M. Cocuzzo, orientata nord-sud, presenta struttura d'insieme riconducibile ad una piega completa, con asse grosso modo SSO-NNE, nella quale:

- l'anticlinale comprende i terreni del versante occidentale e i terreni in asse alla culminazione topografica del rilievo;
- la sinclinale si svolge attraverso i terreni del versante orientale e limitati affioramenti in sinistra orografica a Valle Licetto.
- i piani assiali immergono, di norma, nel IV quadrante, con valori angolari piuttosto bassi, tali che la sinclinale di Valle Licetto presenta, in alcuni punti, il fianco di raccordo all'anticlinale rovesciato e sovrascorso, con cinematica da piega-faglia. Nel particolare, sono anche evidenti pieghe ad asse NE-SO, le quali portano, con pieghe anche coricate, al raddoppio della successione (versante orientale). La prevalente vergenza verso SE di queste strutture si associa, inoltre,

a piegamenti minori con assi NO-SE. Le strutture plicative sul versante orientale si associano poi a meno evidenti piani di sovrascorrimento (destra orografica di Valle Licetto), messi in luce da fasce intensamente deformate, con piani di taglio e pieghe a geometria *chevron*.

In generale, quindi, si riscontra un piegamento e un rovesciamento della successione verso SE, con uno scagliamento al fronte dell'anticlinale coricata.

I dati strutturali al momento disponibili, indicano altresì che le fasi di piegamento ed accavallamento della successione, sono state seguite con ogni probabilità da un comportamento fragile della struttura. In questa fase, le deformazioni sarebbero state accomodate da fagliamenti NO-SE essenzialmente a carattere transpressivo, responsabili anche del forte sollevamento della struttura di M. Cocuzzo, quale oggi si osserva. La direzione principale di compressione è probabilmente orientata ENE-OSO, il che troverebbe buon accordo con numerosi Autori, i quali evidenziano, come prevalente, un sistema di lineamenti N 110-120, caratterizzato da comportamento sinistro (TURCO *et al.* 1990; KNOTT & TURCO 1991; DIJK & OKKES 1991; MONACO & TANSI 1992; RUSSO & SCHIATTARELLA 1992).

Elemento di particolare interesse, nella deformazione plicativa d'insieme, è il comportamento disarmonico dei diversi intervalli litostratigrafici che compongono la successione in serie. Infatti, la deformazione plicativa, specie nel fianco rovesciato alla testata di Valle Licetto, è ben ricostruibile nei termini del complesso peritidale, mentre i termini del complesso di scarpata, al nucleo dell'anticlinale, presentano comportamento fragile e ruolo di membro più competente, espresso, quale cinematica più evidente, da faglie inverse a basso angolo e piccole trascorrenze.

Al nucleo della sinclinale fagliata di Valle Licetto, si collocano infine le «dolomie carnico-noriche» a grossi Coralli, anch'esse interessate da una risposta essenzialmente rigida, con blocchi raddrizzati e rovesciati e solo qualche accenno di piegamento. Le bancate dolomitiche vengono, così, ad essere sostenute da una concavità sinclinalica formata dalle dolomie nere lastroidi del «complesso peritidale». Quest'ultime, come detto, mostrano al contatto una tettonizzazione da scorrimento, espressa da pieghe a geometria tipo *chevron* (Fig. 1).

Nella disarmonia della deformazione, l'elemento a minore competenza risulta, pertanto, essere il complesso peritidale. Di conseguenza, interpretando il rapporto tra il complesso peritidale e le dolomie carnico-noriche come un rapporto tettonizzato ma non tettonico, i terreni del complesso peritidale vengono ad assumere ruolo di livello preferenziale di scollamento. Livello preferenziale che, in tale accezione, separerebbe la sottostante e rigida successione dolomitica di M. Cocuzzo dalle sovrastanti ed altrettanto rigide dolomie carnico-noriche. Dolomie carnico-noriche, le quali in Appennino meridionale costituiscono la base stratigrafica affiorante e finora nota delle potenti Unità tettoniche mesozoiche calcareo-dolomitiche.

Come già anticipato in premessa, l'intera struttura carbonatica di M. Cocuzzo «emerge» in finestra tettonica al disotto delle Unità Alpine, cristallino-metamorfiche (Fig. 1). Il contatto tra i carbonati e le metaforfiti superiori si ritrova, in alcuni punti (a monte di V. Licetto, destra orografica) con giacitura conforme al rapporto di sovrapposizione originario tra le Unità. In molti altri punti, esso è, invece, rappresentato da un piano poco inclinato, con evidente ripresa per scorrimento delle parti; in altri ancora, il contatto originario è chiaramente ripreso e troncato dalle faglie ad alto angolo più recenti. Infatti, sulle deformazioni complesse e polifasiche legate a tettonica compressiva, s'impostano vistosi fenomeni di tettonica tensiva, i

quali, su entrambi i versanti del rilievo, rigettano a gradinata gli elementi cinematici dell'assetto tettonico precedentemente assunto.

Ulteriore elemento tettonico di interesse, dai dati disponibili viene rappresentato dall'appoggio diretto delle Unità alpine sui carbonati triassici di M. Cocuzzo, il quale, laddove viene conservato con i rapporti originari, presenta delle superfici che tagliano sia gli elementi cinematici della struttura del Cocuzzo che differenti livelli stratigrafici della successione corrispondente. E', questo, un dato, che comunque lo si voglia interpretare, ammette sempre una ricostruzione degli eventi tettonici che hanno interessato le due Unità accavallate ben più articolata, per geometrie e fasi, rispetto a quanto fin ora espresso in letteratura (AMODIO MORELLI et al. 1976, BOUSQUET & GRANDJACQUET 1969, BOUSQUET, 1971).

Infatti al M. Cocuzzo, se i rapporti di sovrapposizione delle Unità Alpine sui carbonati triassici rappresentano le originarie geometrie derivate dalla tetto-genesi meso-cenozoica, ne consegue che le Unità Alpine si sono accavallate su una struttura già intensamente deformata, al punto da presentare una successione triassico-cretacica troncata ai livelli dolomitici basali carnico-norici (dolomie a coralli di Valle Licetto).

Se, invece, l'appoggio delle Unità Alpine sul Trias carbonatico, quale oggi si rileva al Cocuzzo, alla testata di destra di Valle Licetto, dovesse essere interpretato come esito di tettonica tensiva e, in tal caso, per faglie a basso angolo, ne deriverebbe l'ammissione di una cinematica estensionale post-thrust del tipo *caos structure*, quale proposta da WERNICKE & BURRCHFIEL 1982, la quale andrebbe ad interessare necessariamente l'intero settore nord dell'Arco Calabro, come del resto già alcuni Autori ipotizzano (D'ARGENIO et al., 1987; D'ARGENIO & IETTO, 1988; IETTO & D'ARGENIO, 1991; IETTO et al., 1992).

4 - Discussione dei dati

I dati riportati nei capitoli precedenti si basano soltanto sui primi rilevamenti di campagna e, come tali, neanche del tutto completi, ne integrati da studi specialistici, specie in ordine alla paleontologia, analisi delle facies e analisi strutturale.

Tuttavia, quello che i dati finora acquisiti possono fornire si sostanzia in alcune indicazioni che, comunque, integrano concretamente la conoscenza del Trias carbonatico dell'Appennino nel settore Calabro-lucano e dell'Arco Calabro e ne estendono, con ogni probabilità, la successione già nota verso livelli stratigrafici più bassi.

Di tali indicazioni, quella di maggior significato, a nostro parere, è il riconoscimento, nella successione carbonatica di M. Cocuzzo, di una serie stratigraficamente continua, la quale evolve da facies bacinali anossiche, in sedimentazione ciclica, a facies di scarpata e, quindi, a facies peritidali. In queste ultime, sedimenti di margine con corpi biocostruiti (le *patch-reefs* di Colle del Crapio) passano lateralmente, con continuità fisica, a sedimenti di laguna tidale (i fanghi dolomitici neri), per essere poi uniformemente sormontati da sequenze cicliche tidali-supratidali.

Ancora nel complesso peritidale, le facies di margine biocostruito, con ogni evidenza, sembrano essere eteropiche a sedimenti che da carbonati evaporitici evolvono a *mud-mounds* (le evaporiti e le «dolomie a *stromatactis*» di Valle delle Pernici).

Il rapporto, stratigrafico o meno, tra i termini del complesso peritidale e le sovrastanti dolomie carnico-noriche resta un problema aperto. Infatti, da un punto di

vista paleogeografico e di facies, apparirebbe del tutto compatibile l'evoluzione di una piana tidale, confinata da margine orlato o da pendio (MULLINS & COOK, 1986), verso una condizione più uniforme di *shelf* aperto ben ossigenato (DAVIES et al., 1989; READ, 1982; TOOMEY, 1991). Una tale evoluzione, del resto, viene documentata anche per alcuni margini triassici del dominio della Tetide, nel settore alpino (BOSELLINI 1984).

Inoltre, anche da un punto di vista paleontologico, la possibilità di un originario rapporto stratigrafico non viene esclusa, dal momento che la presenza di *Griphoporella curvata* GÜMBEL, nelle *patch-reefs*, marca un'intervallo cronologico (Trias superiore, con maggiore diffusione al Norico-Retico-BARATTOLO et al 1991) del tutto compatibile con quello genericamente attribuito alle dolomie del Trias dell'Appennino (Carnico-Norico s.l.), senza per altro uno studio biostratigrafico specifico e di dettaglio.

Sul terreno, però, non è stato finora rilevato in alcun punto un passaggio continuo e indisturbato tale da dare certezza di un rapporto stratigrafico.

Lasciando, quindi, come incerto il rapporto con le dolomie terminali a Coralli e Megalodonti, il resto della serie affiorante al M. Cocuzzo, dalle facies anossiche basali al complesso peritidale, è certamente in continuità di sedimentazione. Pertanto e in accordo con quanto riportato in precedenza, i complessi definiti in premessa, solo sulla base della rispettiva posizione geometrica, possono, sia pure informalmente, essere denominati, per facies prevalenti e toponimi, dal basso verso l'alto:

- complesso bacinale anossico o di Serra Mezzana;
- complesso di scarpata o di M. Cocuzzo;
- complesso peritidale o di Colle del Crapio-Valle delle Pernici.

Circa l'estensione cronologica dell'intera successione, può al momento definirsi solo un limite superiore, attribuibile al complesso peritidale, e corrispondente a un'età non più recente del Trias superiore (Norico probabile), per la presenza, nell'alto stratigrafico della serie, di *Griphoporella curvata* GÜMBEL.

Il prosieguo dello studio biostratigrafico potrà, comunque, definire anche i limiti temporali dei complessi basali, così come l'avanzamento della ricerca nel suo complesso potrà approfondire tutti gli altri aspetti, specie di facies e tettonici, che al momento restano solo accennati e proposti come ipotesi più plausibili.

Lavori citati nel testo

AMODIO MORELLI L., BONARDI G., COLONNA V., DIETRICH D., GIUNTA G., IPPOLITO F., LIGUORI V., LORENZONI S., PAGLIONICO A., PERRONE V., PICCARRETTA G., RUSSO M., SCANDONE P., ZANETTIN LORENZONI E. & ZUPPETTA A. (1976)

L'arco calabro-peloritano nell'orogene appenninico-maghrebide.
Mem. Soc. Geol. It., 17, 1-60.

BARATTOLO F., DE CASTRO P., PARENTE M. (1991) - Some remarks on *Griphoporella curvata* (GUMBEL 1872), PIA 1915, dasycladacean green alga from the late Triassic. 5th International Symposium on fossil algae (Capri 1991), pp.6-7.

BATHURST R.G.C. (1959) - The cavernous structure of some Mississippian stromatolitic reef in Lancashire, England Journal of Geology, 67, 506-521.

- BATHURST R.G.C. (1980) - Litification of carbonate sediments, Science Program Oxford, 66, 451-471.
- BATHURST R.G.C. (1982) - Genesis of stromatactis cavities between submarine crusts in Paleozoic carbonate mud buildups. Geol. Soc. London, 139, 165-181.
- BOSELLINI A. (1984) - Progradation geometries of carbonate platform forms: examples from the Triassic of the Dolomites, northern Italy. Sedimentology, 31, 1-24.
- BOUSQUET J.C. & GRANDJACQUET C. (1969) - Structure de l'Apennin calabro-lucanien (Italie meridionale). Comp. R. Acad. Sc. Paris, 268, 13-16.
- BOUSQUET J.C. (1971) - La tectonique tangentielle des séries calcaréo-dolomitiques du Nord-Est de l'Apennin calabro-lucanien (Italie meridionale). Geol. Romana, 10, 23-52.
- BOUSQUET J.C., MEGARD-GALLI J. & ZORU H. (1978) - Quelques éléments de datation du Trias moyen et supérieur de l'Apennin calabro-lucanien (Italie meridionale). Geologica Romana, 17, 71-83.
- D'ARGENIO B., PESCATORE T. & SCANDONE P. (1973) - Schema geologico dell'Appennino meridionale (Campania Lucania). Atti Acc. Lincei, Quaderno, 183, 49-72.
- D'ARGENIO B., IETTO A. & OLDOW J.S. (1987) - Low angle normal faults in the Picentini Mountains, Southern Apennines. Rend. Soc. Geol. It., 9 (2), 113-122.
- D'ARGENIO B. & IETTO A. (1988) - Tettonica distensiva da faglie normali a basso angolo (LANFs) nell'Appennino meridionale Atti 74° Congr. Soc. Geol. It., Sorrento, vol. A, 225-231.
- DAVIES P.J., SYMONDS P.A., FEARY D. A., PIGRAM C.J. (1989) - The evolution of the carbonate platforms of northeast Australia, in: CREVELLO P. D. et al. - Controls on carbonate platforms and basin development. SEPM Sp. p., 44, 233-258.
- DIJK J. & OKKES M. (1991) - Neogene tectonostratigraphy and kinematics of Calabrian basins; implications for the geodynamics of the Central Mediterranean. Tectonophysics, 196, 23-60.
- ENOS P. & PERKINS R. (1979) - Evolution of Florida Bay from island stratigraphy. Geol. Soc. Am. Bull., 90, 59-83.
- GEBELEIN C.D. & HOFFMAN P. (1973) - Algal origin of dolomite lamination in stromatolitic limestones. Journ. sed. Pet., 43, 603-613.
- GINSBURG R.N. (a cura di) (1975) - Tidal deposits: a casebook of Recent examples and fossil counterparts. Springer-Verlag, New York.
- GRANDJACQUET C. & GRANDJACQUET M.J. (1962) - Geologic de la zone Diamante-Verbicaro (Calabrie). Geologica Romana, 1, 297-312.

- HARDIE L.A. (1977) - Sedimentation on the modern carbonate tidal flats of Northwest Andros Island, Bahamas. Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- IETTO A. & D'ARGENIO B. (1991) - Some accounts on thrust and subsequent extensional tectonics in the Pollino Mountains, Southern Apennines. *Rend. Soc. Geol. It.*, 13, 121-124.
- IETTO A., BARILARO A.M., CALLIGARO G. & MANCUSO C. (1992) - Elementi per una revisione dei rapporti Appennino-Arco Calabro. *Boll. Soc. Geol. It.*, 193-215.
- IETTO A. & BARILARO A.M. (1993) - L'unità di San Donato quale margine deformato cretaceo-paleogene del bacino di Lagonegro (Appennino Meridionale-Arco calabro). *Boll. Soc. Geol. It.*, 1-20.
- JADOUL F. & FRISIA S. (1988) - Le evinosponge: ipotesi genetiche di cementi calcitici nella piattaforma ladinica delle Prealpi lombarde (Alpi meridionali). *Riv. It. Pal. Strat.*, 94, 81-104.
- JAMES N.P. (1983) - Reef environment in «Carbonate Depositional Environments» a cura di SHOLLE P.A. et al., AAPG Memoir 33, 345-440.
- JENKIS H.C. (1986) - Pelagic Environments, in: Reading H.G., *Sedimentary Environments and Facies*, Oxford, 343-397.
- KENDALL, G.St.C. & SCHLAGER W. (1981) - Carbonates and relatives changes in sea level. *Marine Geol.* 44, 18-212.
- KNOTT D. & TURCO E. 1991 - Late Cenozoic kinematics of the Calabrian Arc, southern Italy. *Tectonics*, 10, 6, 1164-1172.
- MATHUR A.C. (1975) - A deeper water mud-mound facies in the Alps. *J. Sed. Petr.*, 45, 4, 787-793.
- MONACO C. & TANSI C. (1992) - Strutture transpressive lungo la zona trascorrente sinistra nel versante nord-orientale del Pollino (Appennino Calabro-Lucano). *Boll. Soc. Geol. It.* 111, 291-301.
- MULLINS H.T. & COOK H.E. (1986) - Carbonate apron models: alternative to the submarine fan model for paleoenvironmental analysis and hidrocarbon exploration. *Sedim. Geology*, 48, 37-39.
- OGNIBEN L. (1973) - Schema geologico della Calabria in base ai dati odierni. *Geologica Romana*, 12, 243-585.
- READ J.F. (1982) - Carbonate Platforms of passive (extensional) continental margins: types, characteristics and evolution. *Tectonophysics*, 81, 195-212.
- RUSSO F. & SCHIATTARELLA M. (1992) - Osservazioni preliminari sull'evoluzione morfostrutturale del bacino di Castrovillari (Calabria Settentrionale). *Studi Geol. Camerti*, Vol. Spec., in st.

- SHINN E.A., LLOYD R.M., GINSBURG R.N. (1969) - Anatomy of a modern carbonate tidal flat, Andros Island, Bahamas. *J. Sed. Pet.*, 39, 1202-1228.
- SHINN E.A. (1983) - Tidal flat Environment in Scholle et al. Carbonate Depositional Environments, AAPG Memoir 33, 172-210.
- STANTON R.J. & FLUGEL E. (1989) - Problems with reef models: the Late Triassic steinplatte «Reef» (Northern Alps, Salzburg, Tyrol, Austria). *Facies*, 20, 1-138.
- TOOMEY D.F. (1991) - Late Permian Reefs of Southern Tunisia: facies pattern and comparison with the Capitan Reef, Southwestern United States. *Facies*, 25, 119-146.
- TURCO E., MARESCA R. & CAPPADONA P. (1990) - La tettonica plio-pleistocenica del Confini Calabro-Lucano: modello cinematico. *Mem. Soc. Geol. It.*, 75° Congr. Naz., Milano, in stampa.
- WERNICKE B. & BURCHFIEL B.C. (1982) - Modes of extensional tectonics. *J. of Struct. Geol.* 4, 2, 105-115.
- WILSON J.L. (1974) - Characteristics of carbonate platform margins. *AAPG Bull.*, 58,4, 810-824.
- WILSON J.L. (1975) - Carbonate facies in Geological History. Springer ed. Berlin, 471 pp.

**IL CRETACICO SUPERIORE DEL MONTE TOBENNA
(SALERNO).
STUDIO SULLA CICLICITÀ DI ALTA FREQUENZA
IN DEPOSITI CARBONATICI DI PIATTAFORMA .**

Nota di
Vittoria Ferreri, Francesco Ardillo, Francesco Paolo Buonocunto
& Nicola Pelosi.

Presentata dal Socio Bruno D'Argenio

Adunanza del 6-11-1993.

PAROLE CHIAVE

Appennino Meridionale, Cretacico, Piattaforme Carbonatiche, Ciclostratigrafia.

KEY WORDS

Southern Apennines, Cretaceous, Carbonate Platforms, Cyclostratigraphy.

RIASSUNTO

I calcari in facies di piattaforma carbonatica del Cretacico superiore (Turoniano pp- Senoniano pp) del Monte Tobenna, Appennino Campano, sono caratterizzati da cicli deposizionali gerarchicamente organizzati in almeno due ordini di frequenze elementari riconosciuti in circa 60 metri di successione, campionati a scala centimetrica. Sono formati da 10 litofacies, ciascuna con un suo specifico significato ambientale, raggruppabili in 6 associazioni di litofacies e nella cui ciclica organizzazione verticale è possibile riconoscere il controllo delle perturbazioni orbitali esercitate attraverso le variazioni climatiche e quindi eustatiche. In particolare l'analisi spettrale ed il metodo dei rapporti (Longo et al., 1993; Pelosi e Raspini, 1993), ha permesso di individuare le periodicità relative al ciclo

breve e lungo dell'eccentricità dell'orbita terrestre e la periodicità relativa al ciclo dell'obliquità dell'asse terrestre. In termini di stratigrafia sequenziale i cicli del Tobenna rappresentano delle parasequenze organizzate in system tracts e consentono di identificare delle sequenze deposizionali anche in successioni carbonatiche apparentemente monotone come quelle di piattaforma interna.

ABSTRACT

Late Cretaceous (Turonian-Coniacian) carbonate platform limestones, outcropping at Monte Tobenna (Southern Apennines), are characterized by depositional cycles, hierarchially organized in at least two orders of frequencies. The individual cycles recognized in about 60 m of sequence measured at cm scale, are made of 10 lithofacies, each with a specific environmental meaning and vertically recurring. These lithofacies appear grouped in 6 associations of lithofacies and in their sequential organization it is possible to recognize the orbital perturbation variability control, imposed through cyclic variations of climate and sea level. Using the spectral analysis and the "ratio fit" methodology (Longo et al., 1993; Pelosi e Raspini, 1993) it has been possible moreover to individuate and quantify the above ciclicities as those related to the long and short orbital eccentricity. Finally in terms of sequence stratigraphy the Monte Tobenna cycles may be considered as parasequences grouped in system tracts and allow to identify depositional sequences separated by recognizable sequence boundary also in apparently monotonous sequence like those of inner carbonate platforms.

INTRODUZIONE

Vengono qui riportati i primi risultati di un'analisi stratigrafica di alta risoluzione condotta su una successione del Cretacico superiore in facies di piattaforma carbonatica affiorante a Monte Tobenna (Salerno), (fig. 1).

Questo rilievo rappresenta un elemento tettonico della complessa struttura dei Monti Picentini che viene in contatto per faglia con il più settentrionale rilievo del Monte Monna.

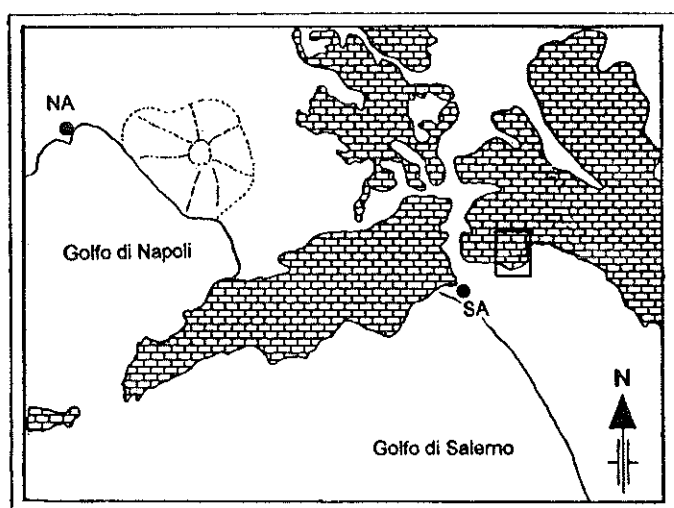


Fig. 1 - Ubicazione del Monte Tobenna (riquadro).
Il mattonato indica i depositi carbonatici Mesozoici.

Lungo il versante meridionale del Monte Tobenna affiora, bene esposta, una successione carbonatica di circa 800 m di spessore complessivo in facies di piattaforma carbonatica, riferita da De Castro (1966) all'intervallo stratigrafico Aptiano p.p.-Senoniano p.p.. La successione è ben stratificata e gli strati immergono con inclinazione di 15-25° verso Nord.

Detta successione è stata da noi riesaminata in chiave microstratigrafica (cioè a scala centimetrica) per evidenziare sia la variazione verticale delle litofacies e delle loro associazioni (e quindi degli originari ambienti di sedimentazione) che quella dello spessore degli strati. Quest'ultimo sembra infatti strettamente connesso alle specifiche tessiture dei depositi carbonatici (D'Argenio et al., 1993). In questa fase del lavoro abbiamo rivolto la nostra attenzione alla parte alta della successione e i risultati che qui di seguito brevemente riportiamo riguardano infatti gli ultimi 60 m circa, ascrivibili al Turoniano p.p.-Senoniano p.p. (*vide* De Castro, 1966). Nel tratto analizzato gli strati sono formati da calcari di colore variabile dal grigio scuro al grigio chiaro e all'avana, di spessore variabile da un minimo di 8 cm ad un massimo di 140 cm. Analogamente a quanto recentemente fatto per successioni del Cretacico inferiore in facies di piattaforma carbonatica (D'Argenio et al., 1992 a, 1992 b, 1993; Longo et al., 1993; Pelosi e Raspini, 1993), la raccolta dei dati è stata eseguita in prevalenza sul terreno con l'aiuto di una lente e di una fettuccia metrica, ed è stata integrata con lo studio di numerose sezioni sottili, sezioni lucide e pellicole di acetato di cellulosa.

I dati così raccolti sono stati tabulati sequenzialmente, in relazione agli spessori che caratterizzano gli strati e le litofacies di volta in volta individuate, onde inquadrare il succedersi delle litofacies e la loro organizzazione sia in termini di ciclostratigrafia che di stratigrafia sequenziale.

ASSOCIAZIONI DI LITOFACIES.

L'interpretazione dei processi deposizionali e diagenetici è basata sulle ricerche già svolte da alcuni di noi su depositi di piattaforma carbonatica; si rimanda ai relativi lavori analitici per ulteriori informazioni (D'Argenio, 1966; D'Argenio et al., 1989, 1992 a, 1992 b, 1993).

Lo studio effettuato ci ha consentito di individuare 10 principali litofacies ognuna con uno specifico significato ambientale, che possono essere

raggruppate in 6 associazioni di litofacies; a loro volta queste formano 2 gruppi di associazioni con più largo significato ambientale o clan (tab. 1 e fig. 2).

Il primo clan è costituito da: Calcari a miliolidi e Calcari laminari, e comprende 2 associazioni di litofacies: A) Calcari laminari e B) Calcari a miliolidi, Thaumatoporella ed Aeolisaccus. Queste 2 associazioni di litofacies mostrano maggiore diffusione nella parte medio alta della successione.

A) Calcari laminari.

Questa associazione è rappresentata da:

a) Laminiti criptalgali (*sensu* Monty, 1976) formate da lamine organiche (circa un millimetro di spessore) irregolarmente ondulate e continue lateralmente (Boundstone "stromatolitici"); la presenza di cavità di forma e dimensioni varie (Boundstone "loferitici"), spesso allargate da dissoluzione, suggerisce inoltre brevi fasi di emersione (diagenesi precoce in ambienti sopratidali), (D'Argenio, 1966; Fischer, 1964; Flugel, 1982; Monty, 1976; Tebbutt et al., 1965; Wilson, 1975).

B) Calcari a miliolidi, Thaumatoporella ed Aeolisaccus.

Questa associazione comprende 4 litofacies:

b1) *Wackestone* e *wackestone-packstone* oligotipici ad Aeolisaccus sp. e a Thaumatoporella sp., a luoghi con gallerie di limivori ben conservate (laguna molto ristretta);

b2) *Packstone-wackestone* e *packstone* a grandi miliolidi con guscio micritizzato e bioeroso, associate ad altri piccoli foraminiferi bentonici (tra cui lituolidi) ed inoltre Thaumatoporella sp., Aeolisaccus sp. ed ostracodi (laguna molto ristretta);

b3) Intercalazioni di livelli centimetrici di *wackestone*, *wackestone-packstone* e *packstone* (normalmente corrispondente alla successiva litofacies b4) e di livelli millimetrici di laminiti criptalgali (litofacies a), (laguna meno ristretta con passaggio ad aree littorali);

b4) *Wackestone*, *wackestone-packstone* e *packstone* a miliolidi di forma e dimensione varie, associate ad altri foraminiferi bentonici (tra cui piccole lituolidi e rare forme a guscio perforato), ed inoltre Thaumatoporella sp., Aeolisaccus sp., Dicyclina sp., ostracodi, granuli micritizzati (laguna meno ristretta).

In breve: i caratteri delle tessiture riscontrate (*packstone*, *packstone-wackestone*, *wackestone* e *mudstone*) con tanatocenosi più o meno oligotipiche, a luoghi prevalentemente arricchite in grosse miliolidi,

CLAN	ASSOCIAZIONI DI LITOFACIES	LITOFACIES	AMBIENTI SEDIMENTARI
(I) Calcari a milioliti e Calcari laminari	(A) Calcari laminari	(a) Boundstone "stromatolitici" e "loferitici" (laminiti criptalgali)	Littorale
	(B) Calcari a Milioliti, Thaumatoporella ed Aeolisaccus	(b1) Wack e wack-pack ad Aeolisaccus e Thaumatoporella, con gallerie di limivori	Laguna molto ristretta
		(b2) Pack-wack e pack a grandi Milioliti, con Thaumatoporella, Aeolisaccus e ostracodi	Laguna ristretta con aree litorali
		(b3) Intercalazioni di wack, wack-pack e pack (litofacies b4) e di laminiti criptalgali (litofacies a)	Laguna meno ristretta
		(b4) Wack, wack-pack e pack a Milioliti, con Thaumatoporella, Aeolisaccus, Dicyclina, ostracodi e granuli micritizzati	
(II) Calcari a foraminiferi ed oncoidi e Calcari a radiolitidi	(C) Calcari ad oncoidi e Dicyclina	(c) Pack-wack e pack ad oncoidi con Dicyclina e foraminiferi	Transizione tra laguna ristretta e aperta
	(D) Calcari a foraminiferi	(d1) Wack-pack e pack a foraminiferi	Laguna aperta e poco profonda
	(E) Calcari a radiolitidi	(d2) Wack e mud-wack bioturbati a foraminiferi	Laguna aperta e più profonda
		(e) Floatstone a radiolitidi	Laguna più aperta

Tab.1 - Clan, associazioni di litofacies e litofacies individuati nella successione di Monte Tobenna e relative interpretazioni ambientali.

Thaumatoporella ed Aeolisaccus, (associazione di litofacies B), e le locali intercalazioni con livelli sottili di laminiti criptalgali di tipo "stromatolitico e/o loferitico" (associazione di litofacies A), suggeriscono ambienti di laguna a circolazione più o meno ristretta ("restricted platform" *sensu* Wilson, 1975; cfr. anche Flügel, 1982), mostranti graduali passaggi ad aree littorali.

Cosiderati nel loro insieme i depositi dell'associazione di litofacies A e quelli dell'associazione di litofacies B suggeriscono un più vasto dominio ambientale in cui i caratteri prevalenti sono quelli di una laguna a circolazione ristretta (clan I, Calcarei a milioliti e Calcarei laminari).

Il secondo clan è costituito da Calcarei a foraminiferi ed oncoidi e Calcarei a radiolitidi e comprende 3 associazioni di litofacies: C) Calcarei ad oncoidi, Dicyclina e piccole milioliti; D) Calcarei a foraminiferi ed E) Calcarei a radiolitidi. Queste 3 associazioni di litofacies mostrano maggiore diffusione nella parte bassa della successione.

C) Calcarei ad oncoidi, Dicyclina e piccole milioliti.

Questa associazione di litofacies è rappresentata da:

c) *Packstone-wackestone* e *wackestone* (subordinatamente *grainstone*) ad oncoidi, Dicyclina sp., Thaumatoporella sp., Aeolisaccus sp., associati a foraminiferi, a guscio perforato e imperforato, e a frammenti di gusci di molluschi intensamente micritizzati e bioerosi (passaggio tra aree lagunari a circolazione ristretta e aree lagunari a circolazione normale).

D) Calcarei a foraminiferi.

Sono formati da 2 litofacies:

d1) *Wackestone-packstone* e *packstone* a foraminiferi bentonici (tra cui abbondanti litoliti e forme a guscio perforato) a luoghi associati ad oncoidi, frammenti di gusci di molluschi micritizzati e bioerosi, rare Thaumatoporella sp. e Aeolisaccus sp. (laguna aperta e di bassa profondità);

d2) *Wackestone* e *mudstone-wackestone* a luoghi bioturbati caratterizzati da tanatocenosi a foraminiferi più diversificate rispetto alla litofacies d1 (laguna aperta e relativamente più profonda).

E) Calcarei a Radiolitidi.

Questa associazione di litofacies è rappresentata da:

e) *Floatstone* a radiolitidi con matrice di *packstone* o di *packstone-wackestone* a foraminiferi bentonici a guscio perforato e imperforato, integri e in frammenti, associati a noduli algali, frammenti di gusci di lamellibranchi intensamente micritizzati e bioerosi e frammenti di

Thaumatoporella sp. (laguna più aperta).

I caratteri delle tessiture riscontrate (wackestone-packstone, packstone e subordinatamente wackestone) con tanatocenosi diversificate e costituite da foraminiferi bentonici a guscio perforato e imperforato (associazione di litofacies D), a luoghi associati ad oncoidi, noduli algali (associazione C) e talora particolarmente arricchite in rudiste e altri gusci di lamellibranchi integri e/o in frammenti (associazione di litofacies E) suggeriscono deposizione in settori di piattaforma carbonatica con caratteri di laguna più o meno aperta e più o meno profonda ("open platform" *sensu* Wilson, 1975; cfr. anche Flugel, 1982).

Pertanto considerate nel loro insieme, le associazioni di litofacies di questo clan (clan II, Calcarei a foraminiferi ed oncoidi e Calcarei a radiolitidi) sono tipiche di una laguna aperta con circolazione normale.

Vi è infine da ricordare una sesta associazione di litofacies rappresentata da :

Calcarei a intraclasti e bioclasti, Questa associazione di litofacies è costituita da depositi gradati poggianti frequentemente su base erosiva e rappresentati da *packstone* bioclastici o da *floatstone* ad intraclasti con matrice di *packstone* o *wackestone-packstone* ad intraclasti e/o bioclasti. Questi depositi formano episodiche intercalazioni nelle associazioni di litofacies sopra descritte e vengono interpretate come tempestite (Aigner, 1982, 1985; D'Argenio et al., 1989, 1992 a , b, 1993; Longo et al., 1993).

CICLOSTRATIGRAFIA

L'organizzazione verticale delle singole litofacies consente di costruire una curva la quale mostra ripetute e regolari oscillazioni dell'originario ambiente deposizionale, da condizioni di laguna più o meno ristretta (litofacies a, b1, b2, b3, b4) a condizioni di laguna più o meno aperta (litofacies c, d1, d2, e) e suggerisce pertanto una ciclicità di alta frequenza (fig. 3).

Sono stati in tal modo individuati 21 cicli di tipo "*shallowing upwards*" il cui trend di abbassamento relativo è di regola suggerito dall'organizzazione interna delle tessiture deposizionali, giacchè si susseguono dal basso verso l'alto litofacies di ambiente lagunare più aperto e più profondo e litofacies di ambiente lagunare più ristretto e meno profondo (cicli subtidali). Questi cicli sono prevalentemente diffusi nella parte medio bassa della

successione, mentre nella parte alta i depositi di ambiente lagunare ristretto sono generalmente sostituiti da sottili livelli di laminiti criptalgali (cicli peritidali).

A luoghi il *trend* di abbassamento relativo del livello marino è anche suggerito dalla sovrainposizione, nella parte sommitale dei cicli, di processi della diagenesi vadosa (microcarsismo) che testimoniano comunque fasi di emersioni relativamente brevi (ad esempio cicli 7, 8, 16, 20). Lo spessore dei cicli varia tra un minimo di 157 cm ed un massimo di 437 cm.

Lungo la successione i singoli cicli sono organizzati in 4 gruppi ognuno costituito da 4 cicli più 2 gruppi incompleti alla base e alla sommità della successione analizzata. Ciascun gruppo è caratterizzato da un aumento dello spessore dei singoli cicli verso l'alto (*trend* di tipo *thickening upwards*); a questo trend si accompagna, di regola, una maggiore diffusione di una o più associazioni di litofacies del clan II (laguna aperta), le quali sono rappresentate da strati relativamente più spessi. Ciò suggerisce nel complesso, per ogni gruppo di 4 cicli, un passaggio verso l'alto a domini lagunari più aperti e più profondi.

Una seconda curva può essere costruita attraverso l'involuppo dei punti di massimo approfondimento relativo per ciascuna delle 21 oscillazioni sopra descritte, opportunamente smussate (figg. 3 e 4). Questa curva riflette la differente distribuzione verticale dei due clan (cioè dei due gruppi di associazioni di litofacies che hanno un più ampio significato ambientale di laguna aperta, di laguna ristretta). Ciò suggerisce anche la presenza di cicli di più bassa frequenza derivanti dall'alternarsi dei corrispondenti domini lagunari più aperti e più ristretti. In particolare si individuano 2 cicli maggiori completi e due incompleti (uno nella parte inferiore e l'altro nella parte superiore della successione).

STRATIGRAFIA SEQUENZIALE

Da quanto sopra detto risulta evidente che nella successione esaminata sono registrate oscillazioni relative del livello marino di ordine differente (fig.3).

Le oscillazioni con frequenza più alta (cicli subtidali, cicli peritidali e gruppi di 4 cicli) mostrano una più regolare lunghezza d'onda (suggerita dalla graduale variazione degli spessori che oscillano intorno al valore

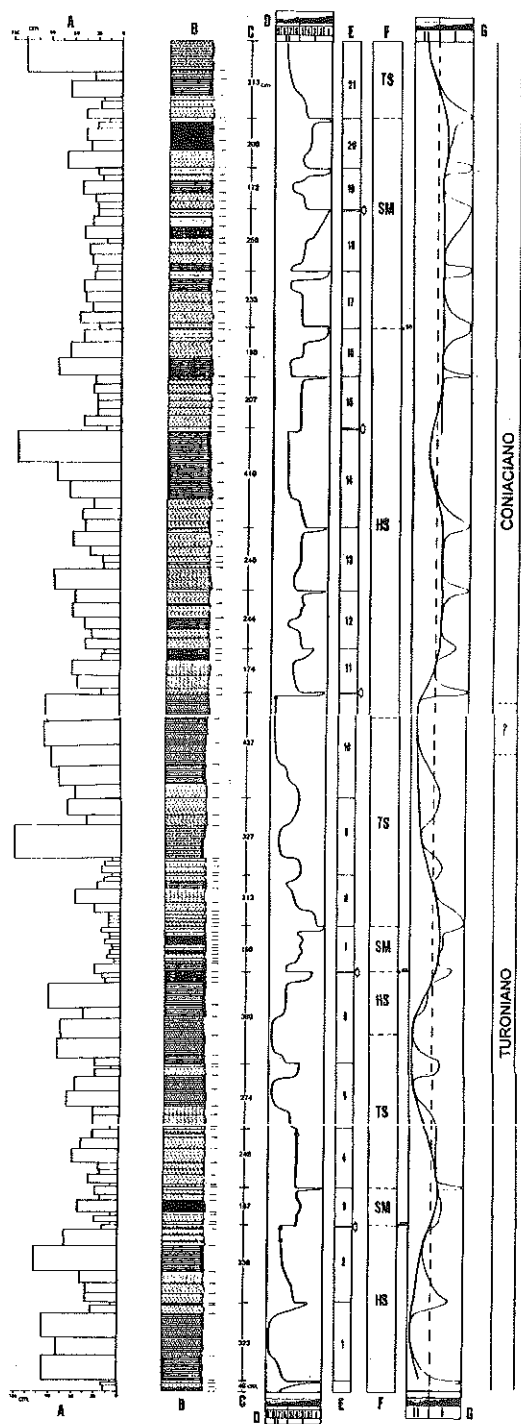


Fig. 3 - Successione del Monte Tobenna.

A) Distribuzione degli spessori dei singoli strati.

B) Log grafico della successione del Monte Tobenna (per i simboli grafici si veda la tab. 1).

C) Spessori dei 21 intervalli (cicli) in cui è stata suddivisa la successione.

D) Curva delle variazioni dell'ambiente deposizionale ricavata dalla successione delle singole litofacies (per il significato ambientale confronta la tab. 1).

E) Numero progressivo dei 21 cicli individuati; le frecce a destra indicano i gruppi di 4 cicli.

F) System tracts e limiti di sequenza (frecce a destra della colonna e sigla SB).

G) Curva dei clan che descrive le oscillazioni ambientali a più bassa frequenza. Essa è stata costruita come inviluppo dei punti di massimo approfondimento dell'originario ambiente di sedimentazione, come si ricava dalla curva, opportunamente smussata, della colonna D.

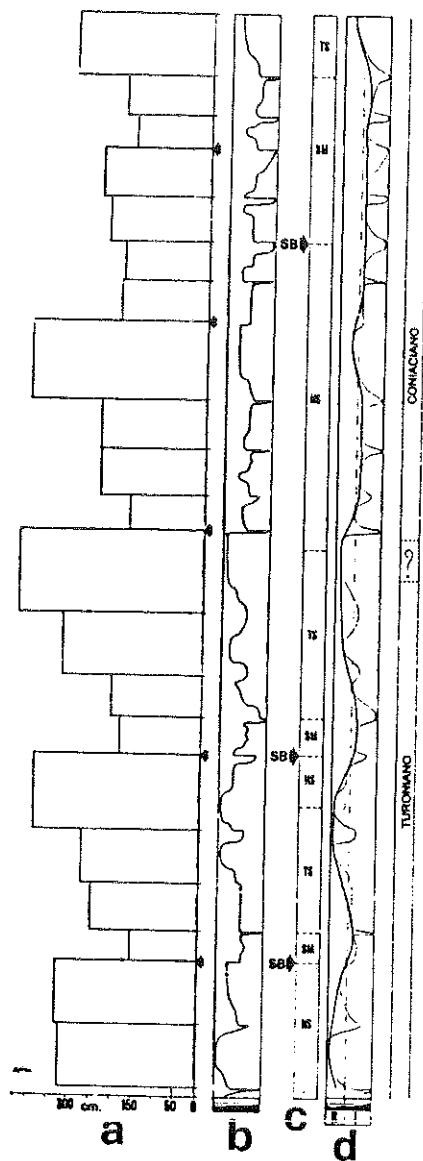


Fig. 4 - Sintesi dei dati riportati nella fig. 3.

a) Distribuzione degli spessori dei cicli generati dall'eccentricita' breve; le frecce indicano i limiti dei gruppi di cicli generati dall'eccentricita' lunga. b-c-d corrispondono rispettivamente a D-F-G della fig. 3.

medio di 264 cm per i singoli cicli e di 1050 cm per i gruppi di 4); la loro organizzazione in gruppi e l'analogia con le successioni consentono di ipotizzare un controllo orbitale: eccentricità breve per i singoli cicli ed eccentricità lunga per i gruppi di 4.

La gerarchia dei cicli, indicata dalla variazione verticale delle facies e dello spessore degli strati, consente di ipotizzare un controllo eustatico anche per le oscillazioni di frequenza relativamente più bassa, assimilabili nel complesso a sequenze deposizionali.

Infatti, come si è visto nel paragrafo precedente, i singoli cicli (per i quali è suggerito un controllo eustatico) assumono il significato di *parasequenze*, cioè di unità di rango inferiore costituenti una sequenza deposizionale (cfr. ad es. Wilgus et al., 1988). Pertanto la loro organizzazione verticale consente di suddividere l'intera successione in intervalli minori che hanno il significato di *system tracts*, costituiti da uno o più cicli e caratterizzati da *trend* trasgressivi (*transgressive system tract* TST) o da *trend* regressivi e/o di aggradazione (*highstand system tract* HST, e *shelf margin system tract* SMST). A questi *trend* si accompagna di regola una variazione sistematica dello spessore degli strati (che tende ad aumentare nei TST e a diminuire, raggiungendo valori minimi, negli SMST), (fig. 3).

Mentre in corrispondenza di cicli relativamente più spessi, caratterizzati dal prevalere di litofacies e/o associazioni di litofacies che indicano ambienti relativamente più aperti si individuano le *maximum flooding surfaces* MFS (che indicano la parte sommitale dei TST), in corrispondenza di uno o più cicli relativamente più sottili, e caratterizzati dal prevalere di litofacies e/o associazioni di litofacies che indicano ambienti relativamente più ristretti, si individuano gli SMST al di sotto dei quali è localizzata la *sequence boundary* (SB). Questa o si individua (fig. 3) al passaggio da un ciclo di spessore maggiore a uno di spessore minore (passaggio ciclo 2-ciclo 3, passaggio ciclo 6-ciclo 7) ovvero è compresa tra 2 cicli più sottili (passaggio ciclo 16-ciclo 17); infatti, a partire da questo ultimo limite, si ha la massima diffusione delle litofacies del clan I (laguna ristretta), e di strati sottili (spessore compreso tra un minimo di 15 cm ed un massimo di 70 cm), il tutto in un intervallo di circa 850 cm di spessore complessivo.

ANALISI SPETTRALE

Lo studio dell'organizzazione verticale delle litofacies individuate nella successione del Monte Tobenna, ha evidenziato una ciclicità che per le sue caratteristiche si può ragionevolmente attribuire a variazioni periodiche dell'ambiente deposizionale.

Ottenuto il riscontro dell'esistenza di un processo ciclico si è passati a quantificare tali periodicità per risalire così al meccanismo che le ha generate. Per evidenziare lo spettro delle frequenze si è usata la tecnica dell'analisi spettrale.

Il segnale stratigrafico registrato nella successione è stato estratto mediante un campionamento periodico effettuato definendo un intervallo di campionamento $I_c = 1$ cm, che rappresenta l'incremento con il quale si registrano le informazioni relative alle 9 litofacies individuate e costituenti la successione del Monte Tobenna. La scelta di questo valore dell'intervallo di campionamento è stata suggerita dalla necessità di evitare il fenomeno dell'*aliasing* responsabile della sovrapposizione delle code spettrali e della conseguente distorsione dello spettro.

Il segnale stratigrafico così ottenuto (fig. 5) è costituito da 5539 punti e, prima dell'analisi spettrale, è stato sottoposto a due trattamenti in modo da

- eliminare il trend generato dal numero di punti che introduce una serie di armoniche e
- ridurre il fenomeno dello *spectral leakage*, che consiste nella comparsa di una serie di armoniche spurie che distorcono lo spettro del segnale esaminato. L'origine di questa distorsione è da attribuire alla limitatezza spaziale e quindi temporale del segnale campionato. Questo essendo estratto da un ipotetico segnale infinito presenterà all'inizio e alla fine due brusche interruzioni che generano delle discontinuità responsabili della distorsione dello spettro. La soluzione a tale problema consiste nell'attenuare le discontinuità ai bordi del segnale campionato, ciò è possibile utilizzando le cosiddette funzioni finestra¹ le quali non sono altro che delle funzioni matematiche che smussano le estremità del

¹La funzione finestra usata è quella gaussiana, la cui equazione è la seguente:

$$w(n) = e^{-\frac{\left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}{2}}$$

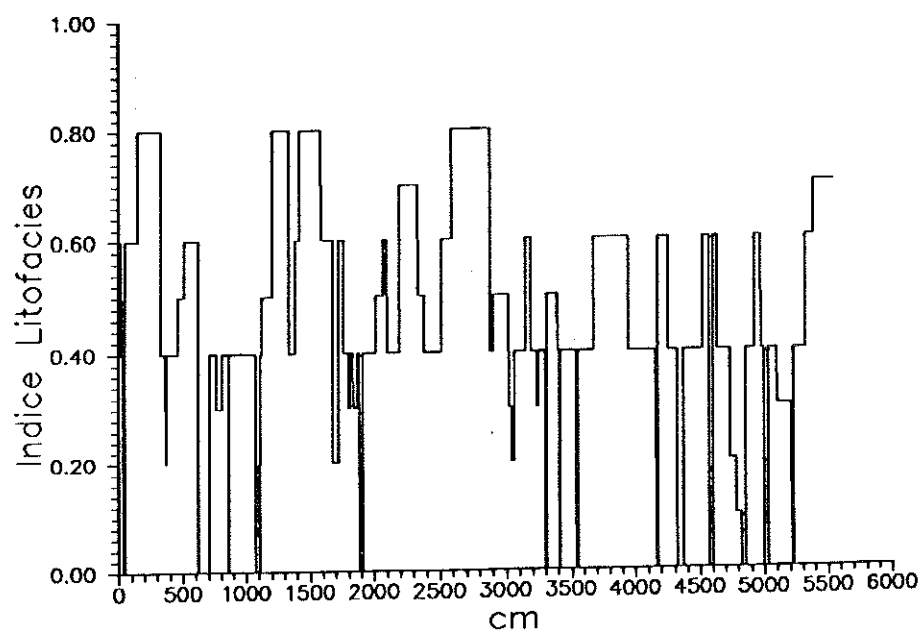


Fig. 5 - Segnale stratigrafico ottenuto dal campionamento periodico della successione del Monte Tobenna.

segnale campionato.

Completata questa prima fase, il segnale trattato (fig. 6) è pronto ad essere sottoposto all'analisi spettrale, utilizzando l'algoritmo proposto da Scargle² (1982).

L'algoritmo di Scargle consente di trattare segnali discreti non equispaziati, cioè segnali, come quelli stratigrafici, dove sono presenti interruzioni dovute a fenomeni erosivi sinsedimentari e/o dissolutivi postdeposizionali. Queste interruzioni anche se in alcuni casi sono visibili, hanno una durata non valutabile, per cui rendono il segnale campionato apparentemente continuo e quindi equispaziato. L'uso dell'algoritmo di Scargle permette di ovviare a questa condizione che influenzerebbe negativamente gli spettri ottenuti dall'applicazione della classica trasformata di Fourier.

Altra caratteristica del metodo di Scargle è quello di contribuire ad una ulteriore riduzione del fenomeno dello *spectral leakage*, ed infine di consentire la stima di un livello di rumore sopra il quale si ha una probabilità del 90% che i picchi appartengono al segnale e non rappresentino rumore di fondo.

Lo spettro ottenuto (fig.7) evidenzia una serie di picchi le cui periodicità sono riportate in tab. 2.

Spessori dominanti individuati (cm)	1108	369	264	107	85
---	------	-----	-----	-----	----

Tab. 2

²L'algoritmo utilizzato da Scargle (1982) per il programma di analisi spettrale è il seguente:

$$P_X(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[\sum_{j=1}^{N_0} x(t_j) \cdot \cos(\omega(t_j - \tau)) \right]^2}{\left[\sum_{j=1}^{N_0} \cos^2(\omega(t_j - \tau)) \right]} + \frac{\left[\sum_{j=1}^{N_0} x(t_j) \cdot \sin(\omega(t_j - \tau)) \right]^2}{\left[\sum_{j=1}^{N_0} \sin^2(\omega(t_j - \tau)) \right]}.$$

dove τ deriva da:

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_{j=1}^{N_0} \sin(2\omega t_j)}{\sum_{j=1}^{N_0} \cos(2\omega t_j)}.$$

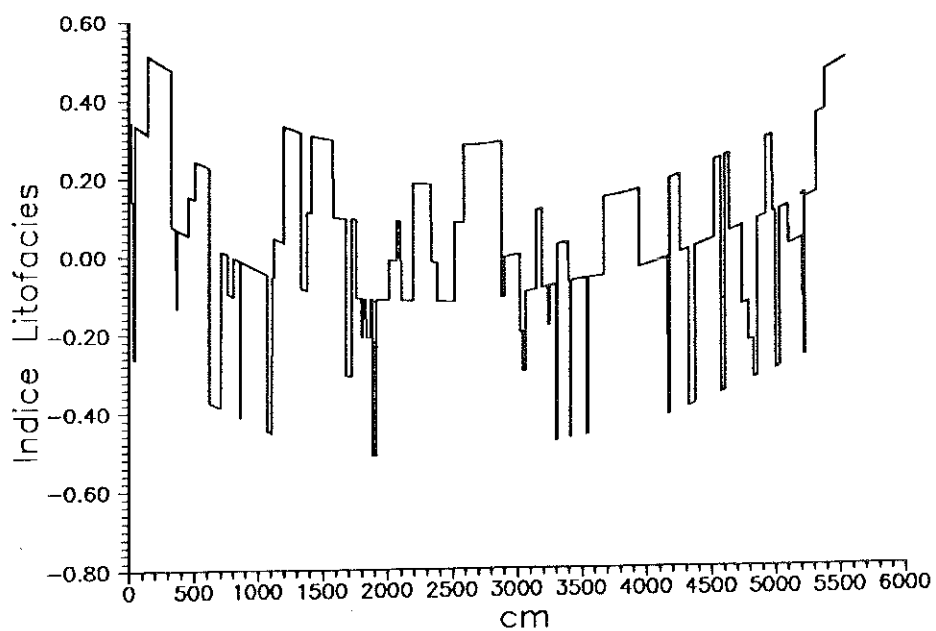


Fig. 6 - Stesso segnale della fig. 5 dopo i trattamenti matematici per eliminare il *trend* e lo *spectral leakage*.

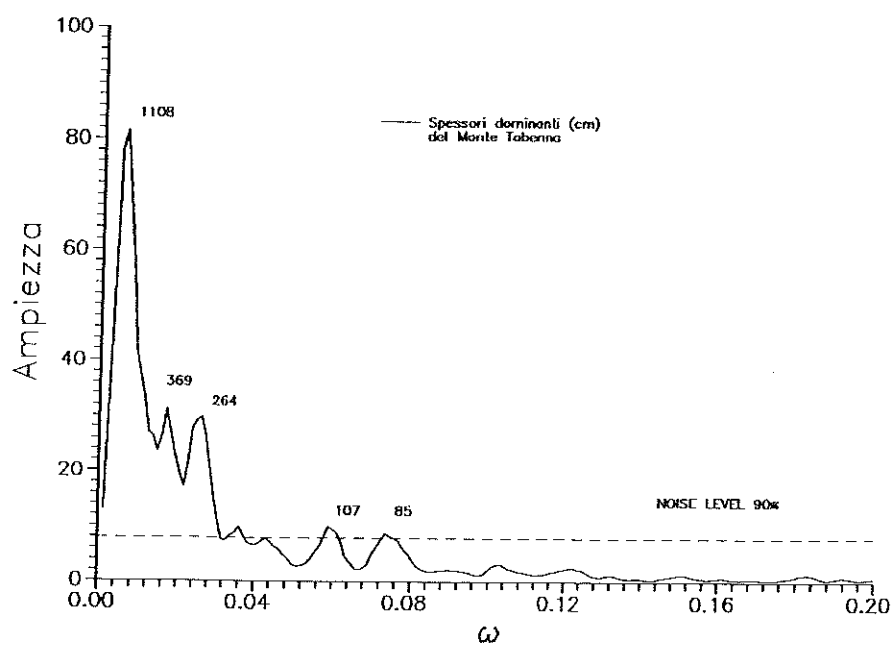


Fig. 7 - Spettro di potenza del segnale stratigrafico del Monte Tobenna, le periodicità espresse dai picchi sono riportate in Tab. 2.

Queste periodicità espresse in centimetri vanno interpretate come gli spessori dei cicli principali che formano la successione stessa, ovvero i centimetri necessari per la ricomparsa di specifiche litofacies nella successione analizzata.

La fase immediatamente successiva è quella di assegnare una durata agli spessori dominanti individuati con l'analisi spettrale, normalmente questo calcolo viene effettuato attraverso una stima del tasso di sedimentazione, ma l'errore che affligge tale stima è solitamente elevato. Per questi motivi la durata dei cicli dominanti è stata calcolata mediante il metodo di Longo et al. (1993). Per l'applicazione di questo metodo i dati necessari sono: (i) le periodicità relative ai cicli orbitali del Cretacico superiore, calcolate analiticamente da Berger et al. (1992) e (ii) gli spessori dei cicli dominanti costituenti la successione individuati dall'analisi spettrale. Per mettere in luce le possibili correlazioni tra (i) e (ii) vengono confrontati i rapporti calcolati per le due serie di dati (Longo et al., 1993; Pelosi e Raspini, 1993).

In pratica rapportando tra loro prima i valori relativi ai periodi dei cicli orbitali, usando a turno, come unità di riferimento tutti i valori calcolati e poi i valori delle periodicità stratigrafiche individuate dall'analisi spettrale, e considerando ogni valore individuato come unità di riferimento in modo da contemplare tutti i possibili rapporti, si ottengono due gruppi di numeri adimensionali, uno per le periodicità temporali (anni) ed un altro per le ricorrenze stratigrafiche (centimetri), che possono essere correttamente confrontati tra loro.

Se i periodi dei cicli orbitali e le periodicità stratigrafiche sono geneticamente collegati tra loro questa corrispondenza oltre ad essere evidenziata da una similitudine tra i valori dei rapporti, verrà definita analiticamente mediante la stima del coefficiente di correlazione. In Tab. 3a vengono riportate le periodicità orbitali espresse in anni relative all'intervallo Turoniano-Senoniano, calcolate interpolando i valori forniti da Berger et al. (1992). In Tab. 3b vengono invece riportati i valori dei rapporti calcolati usando di volta in volta una periodicità orbitale come unità di riferimento.

Eccentricità lunga (anni)	Eccentricità breve (anni)	Obliquità (anni)	Precessione (anni)
403600	95900	39000	18600

Tab. 3a

anni	403600	95900	39000	18600
403600	1	4.21	10.34	21.70
95900	0.24	1	2.46	5.16
39000	0.097	0.41	1	2.1
18600	0.046	0.19	0.48	1

Tab. 3b

In tab. 3c vengono riportati i rapporti calcolati usando a turno come unità di riferimento le singole periodicità stratigrafiche (cm) costituenti la successione del Monte Tobenna ed individuate dall'analisi spettrale (tab. 2).

cm	1108	369	264	107	85
1108	1	3	4.20	10.36	13.04
369	0.33	1	1.40	3.45	4.34
264	0.24	0.72	1	2.47	3.11
107	0.10	0.29	0.41	1	1.26
85	0.08	0.23	0.32	0.79	1

Tab. 3c

Dal confronto dei due gruppi di rapporti e soprattutto dal calcolo dei coefficienti di correlazione relativi alle possibili combinazioni, è risultato che la migliore corrispondenza ($r = 0.999996$) si ha tra i due set di rapporti riportati in tab. 4.

	Periodi orbitali (anni)	Periodi stratigrafici (cm)
Eccentricità lunga	403600	1108
Eccentricità breve	95900	264
Obliquità	39000	107

Tab. 4

Ne risulta quindi che la periodicità stratigrafica di 1108 cm ha una durata di 403600 anni e quindi è l'espressione stratigrafica del ciclo lungo dell'eccentricità, la periodicità di 264 cm con una durata di 95900 anni, esprime il ciclo breve dell'eccentricità, ed infine la periodicità di 107 cm con una durata di 39500 anni esprime stratigraficamente il ciclo dell'obliquità.

Sulla base di questi risultati possiamo affermare che la ciclicità registrata nella successione del Monte Tobenna non è generata da processi autociclici, cioè dovuti ai meccanismi di evoluzione intrinseci all'ambiente deposizionale (Ginsburg et al., 1971), ma è stata indotta da processi allociclici con un controllo dominante esercitato dalle variazioni climatiche (che a loro volta influenzano le oscillazioni eustatiche) determinate dai cicli orbitali (cicli di Milankovic').

DISCUSSIONE

Lo studio a scala centimetrica (analisi delle facies e misura degli spessori) di circa 60 metri di successione in facies di piattaforma carbonatica affiorante al Monte Tobenna (Monti Picentini, Salerno), (fig. 1), e di età Turoniano p.p.-Senoniano p.p (De Castro, 1966) ha consentito di individuare 10 litofacies, ognuna con un suo specifico significato ambientale, e di raggrupparle in 6 associazioni di litofacies e in 2 insiemi di associazioni (clan), cioè in unità stratigrafico-deposizionali di rango superiore e con più largo significato ambientale (fig. 2 e tab. 1).

Per inquadrare il nostro studio in una problematica di più ampio contenuto ed interpretare in chiave di stratigrafia globale il significato degli eventi deposizionali rimasti registrati a livello locale, i dati raccolti a scala centimetrica sono stati tabulati sequenzialmente e sottoposti ad analisi spettrale, analogamente a quanto recentemente fatto per successioni del

Cretacico inferiore in facies di piattaforma carbonatica (D'Argenio et al., 1992 a, 1992 b, 1993; Longo et al., 1993; Pelosi e Raspini, 1993).

In questa fase iniziale di lavoro si è rivolta particolare attenzione alla variazione verticale dello spessore degli strati e delle litofacies di volta in volta individuate. L'analisi sequenziale della variazione verticale delle litofacies ha consentito di individuare 21 cicli di tipo *shallowing upwards* regolarmente organizzati lungo la successione in 4 gruppi, ognuno costituito da quattro cicli, più due gruppi di cicli incompleti posti alle estremità della successione (fig. 4). Ciascun gruppo è caratterizzato da una maggiore diffusione verso l'alto di cicli di spessore maggiore in cui sono ampiamente rappresentati depositi di laguna aperta (clan II) e prevalgono strati relativamente più potenti.

La curva costruita mediante l'involuppo dei punti di massimo approfondimento relativo di ciascuna oscillazione, opportunamente smussata, consente di individuare anche cicli di frequenza più bassa che riflettono, nel complesso, la differente distribuzione verticale dei due clan e dei corrispondenti domini di laguna più aperta e più ristretta (fig. 4).

Per i cicli di più alta frequenza (cicli singoli e gruppi di 4 cicli) il valore degli spessori medi e la regolarità con cui i singoli spessori variano lungo la verticale consentono di ipotizzare un controllo climatico ed eustatico di alta frequenza legato alla variazione dei parametri orbitali: eccentricità breve per i singoli cicli ed eccentricità lunga per i gruppi di 4 cicli. La quantizzazione di questi cicli è stata ottenuta mediante l'analisi spettrale che ha messo in luce nella registrazione del segnale stratigrafico della successione del Monte Tobenna, la presenza di ricorrenze dominanti (1108 cm, 264 cm e 107 cm). A tali spessori periodici è stato possibile, mediante il metodo di Longo et al. (1993), rispettivamente associare la durata di 403.600 anni, 95.900 anni e 39.000 anni e questa corrispondenza è dimostrata dal valore elevato del coefficiente di correlazione ($r=0.999996$).

Da quanto sopra esposto, si può concludere che i cicli del Tobenna rappresentino delle *parasequenze*, intese nel senso più ampio del termine e col significato ad esse attribuito in stratigrafia sismica e sequenziale (cfr. ad esempio Wilgus et al. 1988).

Considerando la loro organizzazione verticale è possibile suddividere l'intera successione in intervalli minori che, in base alle loro caratteristiche interne (variazione delle facies e degli spessori degli strati e di conseguenza dei singoli cicli) possono essere assimilati a *system tracts* (fig. 4). Partendo da questi presupposti le oscillazioni maggiori registrate nel Cretacico

superiore del Monte Tobenna, (suggerite dalla curva costruita in base alla organizzazione verticale dei singoli cicli) possono rappresentare delle *sequenze deposizionali* (cfr. cicli del 3 ordine, Haq et al., 1987) per le quali viene ipotizzato un controllo eustatico di più bassa frequenza.

Un simile controllo è stato da noi individuato anche per le oscillazioni di bassa frequenza del Cretacico inferiore del non lontano Monte Raggeto (Monte Maggiore, Caserta) utilizzando le curve che descrivono le variazioni ambientali maggiori e le variazioni dello spessore medio degli strati che compongono i 28 intervalli in cui l'intera successione Barremiano p.p.-Albiano p.p. è stata suddivisa (D'Argenio et al. 1993).

Risulta possibile in questo modo individuare delle sequenze deposizionali anche in successioni apparentemente monotone ed omogenee come quelle di piattaforma carbonatica interna del Cretacico.

BIBLIOGRAFIA

- AIGNER T.H. Calcareous tempestites: storm-dominated stratification in upper Muschelkalk Limestones (middle Trias, SW Germany). In: EINSELE G. & SEILACHER A. (eds), *Cyclic and event stratification*, 180-198, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
- AIGNER T.H. Storm depositional systems. *Lecture Notes in Earth Sciences*, 3, 174, p.p. Springer-Verlag, Berlin, (1985).
- BERGER A., LOUTRE M. F. & LASKAR J. Stability of the astronomical frequencies over the Earth's history for paleoclimate studies. In *Science* 255, 560-566, (1992).
- CARANNANTE G., D'ARGENIO B., LONGO G. & PELOSI N. The Triassic cyclothems of Annunziata Lunga Pass (Southern Apennines) revisited and reassessed. In: CNRS-IFP *Sequence Stratigraphy of European basins*. 408- 409. May 18- 20- Dijon Abstracts volume, (1992).
- CNRS-IFP. *Sequence Stratigraphy of European Basins*. May 18- 20- 1992 Dijon Abstracts volume, 495 pp., (1992).

- D'ARGENIO B. *Facies littorali mesozoiche nell'Appennino meridionale.* Boll. Soc. Nat. in Napoli, 75, 497-552, (1967).
- D'ARGENIO B. *Le piattaforme carbonatiche periadriatiche: una rassegna di problemi nel quadro geodinamico Mesozoico dell'area mediterranea.* Mem. Soc. Geol. It., 13, 137-160, (1976).
- D'ARGENIO B., FERRERI V., ARDILLO F. & BUONOCUNTO F. P. *Microstratigrafia e stratigrafia sequenziale. Studi sui depositi di piattaforma carbonatica, Cretacico del Monte Maggiore (Appennino Meridionale).* Boll. Soc. Geol., 112, 10 pp., (1993).
- D'ARGENIO B., FERRERI V., IORIO M., LONGO G. & RASPINI A. *Early Cretaceous eustatic oscillation under astronomical forcing and related problems in time calibration. The case of Southern Italy. In: CNRS-IFP, Sequence Stratigraphy of European Basin. 406-407. May 18-20 Dijon Abstracts volume, (1992a).*
- D'ARGENIO B., FERRERI V. & RASPINI A. *A cm-scale study of shallow water cretaceous deposits formed under high frequency eustatic regime. Monti di Sarno (Southern Italy). A sedimentologic approach to microstratigraphy.* Boll. Soc. It., 111, 399-407, (1992b).
- D'ARGENIO B., FERRERI V. & RUBERTI D. *Cyclic versus episodic deposition in a carbonate platform sequence. Lower Cretaceous of Matese Mountains, Southern Apennines.* Mem. Soc. Geol. It. 40, 375-382., (1989)
- D'ARGENIO B., FERRERI V. & RUBERTI D. *Cicli ciclotemi e tempestiti nei depositi carbonatici aptiani del Matese (Appennino Campano).* Atti 74° Congresso Soc. Geol. It., Sorrento 1988. Mem. Soc. Geol. It. 41, 761-773., (1992c).
- D'ARGENIO B., MINDSZENTY A., BARDOSSY G., JUHASZ E. & BONI M. *Bauxites of Southern Italy revisited.* Rend. Soc. Geol. It. 9, 263-268, (1987).

- DE CASTRO P. Sulla presenza di un nuovo genere di Endothyridae nel Cretacico Superiore della Campania. Boll. Soc. Nat., 75, 317-347, (1966).
- EINSELE G., RICKEN W. & SEILACHER A. (eds), Cyclic and Event in Stratigraphy. Springer-Verlag, Berlin, 956 pp. (1991).
- FISCHER A.G. The Lofer Cyclothems of the Alpine Triassic. Kans. Geol. Surv. Bull., 169, 107-149, (1964).
- FISCHER A.G., DE BOER P.L. & PREMOLI SILVA I. Cyclostratigraphy. In: GINSBURG R.N. & BEAUDOIN B. (Eds), Cretaceous Resources, Events and Rhythms. Kluwer Acad. Publ., 139-172., (1990).
- FLÜGEL E. Microfacies analysis of Limestones. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 636 pp., (1982).
- GINSBURG, R. N. Landward movement of carbonate mud: New model for regressive cycles in carbonates [abs.]. American Association of Petroleum Geologist Bulletin. Vol. 55: 340, (1971).
- HAQ B.U., HARDENBOL J. & VAIL P.R.. Chronology of fluctuating sea level since Triassic (250 milion years ago to Present). Science, 235, 1156-1167. , (1987).
- HORNE J. H. & BALIUNAS S. L. (1986) A prescription for period analysis for unevely sampled Time Series. The Astrophisycal Journal, 302, 757-763.
- LONGO G., D'ARGENIO B., FERRERI V. & IORIO M. Fourier evidence for high frequency astronomical cycles recorded in Lower Cretaceous carbonate platform strata. Monte Maggiore Southern Apennines, Italy. In: DE BOER P.L. & SMITH D.G. (eds) IAS Spec. Publ. on Orbital forcing and cyclic sequences , 19, 77-85. Blackwell, Oxford, (1993).

- LONGO G., D'ARGENIO B., FERRERI V., IORIO M. & PELOSI N. A technique to search for periodicities in cyclostratigraphic data. In: CNRS-IFP, Sequence Stratigraphy of European basins. 420. May 18-20 Dijon Abstracts volume, (1992).
- MOUNTY C. L. V. The origin and development of cryptalgal fabrics. 193-250, in: WALTER M. R. (edit) Stromatolites Elsevier, New York. 790 pp., (1976).
- PELOSI N. & RASPINI A. Analisi spettrale della ciclicità di alta frequenza in successioni carbonatiche neritiche di limitato spessore. Il caso del Cretacico dei Monti di Sarno (Campania). *Giornale di Geologia* (in stampa), (1993).
- SCARGLE J. D. (1982) Studies in astronomical time series analysis II. Statistical aspects of spectral analysis of unevely spaced data. *The Astrophisycal Journal*, 263, 835-853.
- TEBBUTT G. E., CONLEY C. D., & BOYD D. W. Lithogenesis of a distinctive carbonate rock fabric. *Wyoming Geol. Survey., Contributions to Geology*, V.4, no. 1, 1-13, (1965).
- VAIL P.R., AUDERMARD F., BOWMAN S.A., EISNER P.N. & PETER-CRUZ C. " The Stratigraphic signatures of tectonics, eustasy and sedimentology. An overview." In EINSELE G., RICKEN W. & SEILACHER A. (eds). "Cycles and events in Stratigraphy." Springer-Verlag, Berlin, 617-659, (1991).
- WILGUS C. K., HASTINGS B. S., KENDALL C. G. St. C., POSAMENTIER H. W. , ROSS C. A., & VAN WAGONER J. C. (eds) Sea-level changes: an integrated approach S. E. P. M., Spec. Publ., no. 42, 407 pp., (1988).
- WILSON J. L. Carbonate facies in geologic history. Springer-Verlag, Berlin, 474 pp., (1975).

Fig. 1 - Ubicazione del Monte Tobenna (riquadro).
Il mattonato indica i depositi carbonatici Mesozoici.

Fig. 2 - Interpretazione schematica dell'ambiente di deposizione delle 10 litofacies individuate nel Cretacico superiore del Monte Tobenna.

Fig. 3 - Successione del Monte Tobenna.

- A) Distribuzione degli spessori dei singoli strati.
- B) Log grafico della successione del Monte Tobenna (per i simboli grafici si veda la tab. 1).
- C) Spessori dei 21 intervalli (cicli) in cui è stata suddivisa la successione.
- D) Curva delle variazioni dell'ambiente deposizionale ricavata dalla successione delle singole litofacies (per il significato ambientale confronta la tab. 1).
- E) Numero progressivo dei 21 cicli individuati; le frecce a destra indicano i gruppi di 4 cicli.
- F) System tracts e limiti di sequenza (frecce a destra della colonna e sigla SB).
- G) Curva dei clan che descrive le oscillazioni ambientali a più bassa frequenza. Essa è stata costruita come inviluppo dei punti di massimo approfondimento dell'originario ambiente di sedimentazione, come si ricava dalla curva, opportunamente smussata, della colonna D.

Fig. 4 - Sintesi dei dati riportati nella fig. 3.

- a) Distribuzione degli spessori dei cicli generati dall'eccentricita' breve; le frecce indicano i limiti dei gruppi di cicli generati dall'eccentricita' lunga. b-c-d corrispondono rispettivamente a D-F-G della fig. 3.

Fig. 5 - Segnale stratigrafico ottenuto dal campionamento periodico della successione del Monte Tobenna.

Fig. 6 - Stesso segnale della fig. 5 dopo i trattamenti matematici per eliminare il *trend* e lo *spectral leakage*.

Fig. 7 - Spettro di potenza del segnale stratigrafico del Monte Tobenna, le periodicità espresse dai picchi sono riportate in Tab. 2.

Tab.1 - Clan, associazioni di litofacies e litofacies individuati nella successione di Monte Tobenna e relative interpretazioni ambientali.

**STRUCTURAL STUDIES ON PRO-OXYTOCIN-
NEUROPHYSIN PEPTIDES REPRODUCING THE
DIBASIC PROCESSING SITE.**

**Nota di : L.Paolillo¹, G.D'Auria¹, L.Falcigno¹,
M.Saviano¹ and C. Di Bello².**

Presentata dal socio : Paolo Corradini

Adunanza del 6/11/93

Abstract

Bioactivation of pro-proteins by limited proteolysis is a general mechanism in the biosynthesis of hormones, receptors and viral protein precursors. The cleavage process occurs at the level of basic residues in the pro-forms. Peptides reproducing the N-terminal processing domain of pro-oxytocin-neurophysin hormone precursor have been analyzed in solution by a combination of 1D and 2D NMR and molecular mechanic calculations.

The results demonstrate that the region around the proteolytic site (pair residues Lys-Arg) is organized as a β -turn and that, depending on the chain length, the β -turn structure is topologically different thus changing the orientation of the

basic residues side chains.

These data point to the importance of the secondary structure around the basic residues pair Lys-Arg and demonstrate that it is an important feature for processing enzyme recognition.

Key Words

prohormone / proteolytic processing / oxytocin / NMR / β -turn

Riassunto

La bioattivazione delle pro-proteine per proteolisi selettiva é un meccanismo generale nella biosintesi di ormoni, recettori e proteine virali. Il processo di idrolisi avviene al livello di residui basici nelle pro-forme. Sono stati analizzati in soluzione peptidi riproducenti la sequenza intorno al sito di idrolisi (coppia di residui Lys-Arg) del precursore ormonale pro-ossitocina-neurofisina, attraverso tecniche di NMR mono e bidimensionale e di Dinamica Molecolare. I risultati dimostrano che tale regione è organizzata in β -turn di topologia variabile con la lunghezza del frammento peptidico analizzato. Questi dati evidenziano l'importanza della struttura secondaria intorno alla coppia Lys-Arg ai fini del processo di riconoscimento enzima-substrato.

Introduction

Limited proteolysis of peptidic hormone precursors is a key

step in the postranslational events leading to the maturation of the inactive pro-forms. Examination of the prohormones primary structure indicates that the proteolytic processing occurs at given loci generally represented by basic amino acids, arranged as singlets or pairs (Lys-Arg). Both *in vitro* and *in vivo* studies have indicated that the integrity of the doublet, although essential, is not sufficient to assure the enzymatic activity [7;8]. This observation supports the idea that some kind of secondary structural organization, on both sides of the dibasic pair, can play a critical role in peptide-substrate recognition by proteolytic processing enzymes [8]. In the present communication we report a conformational study carried out by potential energy minimization and NMR spectroscopy in different solvents on the following model peptides :

Peptide XXIV: Leu8-Gly9-Gly10-Lys11-Arg12-
 Ala13-Val14-Leu15

Peptide XXV: Pro7-Leu8-Gly9-Gly10-Lys11-Arg12-
 Ala13-Val14-Leu15

Peptide XXX: Leu8-Gly9-Gly10-Lys11-Arg12-
 Ala13-Val14-Leu15-Asp16

PeptideXXIII: Leu8-Gly9-Gly-10-Lys11-Arg12-
 Ala13-Val14-Leu15-Asp16-Leu17-
 Asp18-Val19-Arg20

Peptide Pro7-XXIII: Pro7-Leu8-Gly9-Gly-10-Lys11-
 Arg12-Ala13-Val14-Leu15-Asp16-
 Leu17-Asp18-Val19-Arg20

reproducing the aminoacid sequence around the Lys-Arg pair present in the pro-oxytocin/neurophysin precursor.

Experimental

NMR Measurements

Nuclear magnetic resonance experiments were carried out on a Varian Unity 400 spectrometer located at the "Centro Interdipartimentale dei Peptidi Bioattivi" and on a Bruker AM 400 spectrometer located at the "Centro Interdipartimentale di Metodologie Chimico-Fisiche" of the University of Naples "Federico II". Solutions used for nmr experiments were prepared by dissolving 4-6 mg of each peptide in the following solvents: DMSO-d₆ (99.99 % isotopic purity, Aldrich), DMSO-d₆/H₂O 70/30 v/v and 90/10 v/v; TFE-d/H₂O 70/30 v/v; H₂O/D₂O 90/10 v/v. D₂O and TFE-d (Aldrich) were 99.9% and 99% isotopic purity, respectively.

Nmr chemical shifts were referred to internal tetramethylsilane (TMS) in the case of DMSO and TFE solutions and to internal 3-(trimethylsilyl)-propionic acid-2,2,3,3,4,4-d₄ in the case of water solutions.

Proton chemical shift assignments were made with the aid of two-dimensional (2D) such as double quantum filtered correlated spectroscopy (COSY) [6], homonuclear Hartmann-Hahn experiments (HOHAHA) [1], nuclear Overhauser enhancement spectroscopy (NOESY) [4] and rotating frame nuclear Overhauser enhancement spectroscopy (ROESY) [2]. 2D spectra were always run in phase sensitive mode using the TPPI method (time proportional phase incrementation) or the

States-Haberkorn method. All 2D spectra were acquired at 298 K. The time domain matrix was formed of 512*2048 complex data points for NOESY and ROESY spectra and of 512*4096 complex data points for COSY and HOHAHA experiments. All experiments were zero filled in F1 before transformation. Gaussian, sine-bell and square functions were used for resolution enhancement in both dimensions. HOHAHA experiments with $t_m=70\text{ms}$ were shown to provide optimal magnetization transfer. ROESY and NOESY experiments were performed with mixing times in the range 100 to 400 ms. Temperature coefficients were measured over the temperature range 298K to 318K.

Computational details.

The starting models for energy minimization were derived from NOE data. Energy minimizations were performed with the Silicon Graphics IRIS 4D25GT Turbo computer, using the DISCOVER program from the Discover package of Biosym Technologies with the "*ab initio* potentials" of the CVFF (covalent valence force field). Conjugate gradient method was used for all minimizations. Many runs of minimization were performed until the maximum derivative was less than 0.01 Kcal/mole Å. The solvent-accessible surfaces were computed with the Connolly algorithm.

Results

Nmr parameters i.e; chemical shifts, coupling constants, temperature coefficients of amide protons and intramolecular *NOE* effects other than sequential ones have been measured in different solvent systems. In the following paragraphs the main results for each peptide will be presented and their conformational properties will be discussed.

Leu8-Gly9-Gly10-Lys11-Arg12-Ala13-Val14-Leu15 (Peptide XXIV)

Nmr spectra have been analyzed in the following solvents: DMSO, DMSO/H₂O, TFE/H₂O, H₂O. Chemical shifts, measured in DMSO/H₂O, are reported in table 1, while backbone coupling constants, amide proton temperature coefficients and conformationally informative *NOE* effects are shown in table 2a. In all solvents but in DMSO/H₂O NMR parameters point to a disordered structure in solution. In fact backbone coupling constants are similar to those found for random structures. In addition relatively high temperature coefficients of amide protons as well as the observation of no *NOE* effects other than sequential ones between backbone α -CH_i and NH_(i+1) support this conclusion.

In DMSO/H₂O solution, on the contrary, weak NH-NH interactions appear in the NOESY two-D spectrum (Fig. 1A). These interactions (table 2a) involve two peptide segments that include Gly⁹, Gly¹⁰ and Lys¹¹ residues on one side and Ala¹³, Val¹⁴ and Leu¹⁵ on the other. Assuming that these weak *NOE*

effects can be attributed to only one weakly populated ordered structure, the experimental data fit two β -turns in the Leu8-Lys11 and Arg12-Leu15 segments [9]. The relatively lower values of the $J_{\alpha N}$ coupling constants in this solvent mixture seem to support this assumption.

Pro7-Leu8-Gly9-Gly10-Lys11-Arg12-Ala13-Val14-Leu15 (Peptide XXV)

Nmr parameters have been measured in the same solvents described above and also in CD₃OH. Proton resonance assignments were carried out mostly by two-D techniques. In table 1 are reported the chemical shifts in DMSO/H₂O. Unlike the previous case NH-NH *NOE* interactions that are relevant for secondary structure implications [9], can be determined not only in DMSO/H₂O solution but also in pure DMSO. Measurements carried out at two different temperatures always show the same weak intermolecular *NOE* effects between Gly9 and Gly10 and between Ala13 and Val14 (Fig.2B). Assuming that these effects refer to only one weakly populated ordered species, the data are consistent with the existence of two β -turns in the peptide fragments Pro7-Gly10 and Lys11-Val14.

By simple comparison of the observed *NOE* effects (table 2b) with the previous peptide XXIV, it appears very likely that the two β -turns are architecturally different. In fact molecular mechanic calculations on both peptides will demonstrate that this indeed is the case.

Leu8-Gly9-Gly10-Lys11-Arg12-Ala13-Val14-Leu15-

Asp¹⁶ (Peptide XXX).

Nmr parameters measured with the methods previously described point to predominantly unfolded structures in aqueous and organic solutions such as DMSO and TFE. As observed above, in the much more viscous medium of the mixture DMSO/H₂O this peptide exhibits weak *NOE* effects other than sequential ones (table 2c). This has been observed at the two different temperatures of 294 and 277 K. The *NOE* effects between NH resonances are quite similar to those described for peptide XXIV. Interresidue contacts exist between Gly⁹, Gly¹⁰ and Lys¹¹ and between Ala¹³, Val¹⁴ and Leu¹⁵ residues. It is therefore very likely that peptide XXX has, as far as the backbone is concerned, a structure identical to that of peptide XXIV i.e. two β -turns in the peptide fragments Leu⁸-Lys¹¹ and Arg¹²-Leu¹⁵.

Leu⁸-Gly-Gly-Lys-Arg-Ala-Val-Leu-Asp-Leu-Asp-Val-Arg²⁰ (Peptide XXIII)

NMR parameters have been measured in DMSO and DMSO/H₂O. Table 2d shows backbone coupling constants, amide proton temperature coefficient and conformationally informative *NOE* effects, measured in cryoprotective mixture DMSO/H₂O 70:30. Proton chemical shifts are listed in table 1. The *NOE* effects (Fig. 1C) in this case are considerably stronger than those observed in the shorter peptides XXIV, XXV, XXX, and, thus, they permit to postulate with a higher degree of confidence, a possible β -turn structure in the peptide

fragment Leu⁸-Lys¹¹ and a helix structure in the C-terminal fragment Ala¹³-Arg²⁰.

It must be also pointed out that in this peptide backbone coupling constant reveal a trend to lower values in going from DMSO to DMSO/H₂O. This fact is in accord with the NOE data that indeed a higher population of a folded structure in the latter solvent exists.

Pro⁷-Leu-Gly-Gly-Lys-Arg-Ala-Val-Leu-Asp-Leu-Asp-Val-Arg²⁰
(Peptide Pro⁷-XXIII)

As in the previous case for peptide XXIII, too, NMR parameters have been measured in DMSO and DMSO/H₂O. Proton chemical shifts are shown in table 1 and backbone coupling constants, amide proton temperature coefficients and NOE effects are reported in table 2e. NH-NH NOE effects are observed both in DMSO and DMSO/H₂O (Fig. 1D) and they are stronger than peptides XXIV, XXV and XXX. In particular NOEs between consecutive peptide NHs along the C-terminal segment, starting from Ala¹³ to the last Arg²⁰ residue, support the possibility of a helical-type structure in the C-terminal sequence.

More structurally informative NOE effects are found in the DMSO/H₂O system (table 2e). They involve the residues Gly⁹-Gly¹⁰. On the basis of these NOEs it is possible to postulate that a folded region appears in the N-terminal part of this peptide and it is compatible with a β -turn involving the segment Pro⁷-Gly¹⁰.

Molecular models.

The energy minimizations were performed in order to build plausible molecular models based on the NOE data determined experimentally. The NH-NH interactions suggest for Peptide XXIV a possible structure that involves two type I β -turns: the first starting from Leu⁸ residue, the latter from Arg¹² residue, these with the formation of intramolecular H-bonds between Lys¹¹ NH and Leu⁸ CO and between Leu¹⁵ NH and Arg¹² CO.

The application of minimization methods to this conformational model shows that it is stable and represents an energy minimum for the structure. The analysis of the H-bond pattern shows the existence of additional hydrogen bonds between Leu⁸ NH and Lys¹¹ CO and between Leu⁸ NH and N of the Arg¹² sidechain. The results underline the existence of successive hydrophobic and hydrophilic domains with Lys and Arg sidechains pointing toward opposite regions (Fig. 2A).

In the case of Peptide XXV in which a Pro residue has been added to the N-terminal part two type II β -turns, starting from the Pro⁷ and from the Lys¹¹ residues, are suggested from the NOE data. Four different models have been built with all possible combination of type I and type II β -turns in the peptide segments 7-11 and 11-15. Each model was tested with the minimization procedure. The most stable structure is the one suggested by the NOE data. The analysis of the H-bond pattern

shows H-bond between Pro⁷ CO and Gly¹⁰ NH, between Lys¹¹ CO and Val¹⁴ NH and an extra bond between Pro⁷ NH and Gly¹⁰ CO. This structure is different from that of peptide XXIV. In fact, (Fig.2B) the Lys and Arg sidechains now are on the same side of the molecule and determine two well defined hydrophobic and hydrophilic domains. In addition the most stable structure of peptide XXV results less stable than that of peptide XXIV. This result gives a possible explanation for the different NMR behaviour of the two compounds.

Peptide XXX shows the same behaviour of Peptide XXIV, with the presence of the same H-bond pattern.

In the case of peptide XXIII and Pro⁷-XXIII two slightly different structures are obtained (Fig.2C and 2D). In the N-terminal segment, the two peptides share a type I β -turn for peptide XXIII, between Leu⁸ CO and Lys¹¹ NH, and type II β -turn for Pro⁷-XXIII, between Pro⁷ CO and Gly¹⁰ NH. In the C-terminal part, both peptides are characterized by a common helical structure starting from the Ala¹³ residue. This behaviour gives a different orientation for the Lys and Arg sidechains. For peptide XXIII the sidechains are pointing toward opposite regions, as for peptide XXIV, while for Pro⁷-XXIII the sidechains are on the same side of the molecule, as for peptide XXV.

Conclusions

The results presented in this work demonstrate that the peptides studied do not possess a unique structural architecture. In fact

NMR data such as chemical shifts, coupling constants and temperature coefficients point to averaged populations with only limited amounts of folded structures. These latter ones are revealed by weak NOE effects in aqueous solutions.

Only when viscous media such DMSO/H₂O mixtures are used, the folded structures can be brought to light. This is probably consequence of an increased viscosity [3] which induces an enhancement of the folded population. The NOE effects observed in our peptides in the DMSO/H₂O mixture are increasingly stronger with the length of the peptide chain and this is in accord with the hypothesis of a non predominant folded population. This is, by the way, in agreement with coupling constant and temperature coefficient data that are typical of averaged structures.

The NOE effects are, on the other hand, very revealing from a structural point of view. In combination with computer modeling technique the following conclusions can be drawn: when the peptide is formed of eight amino-acids (Peptide XXIV) from position 8 to 15 of the natural pro-hormone two type I β -turns appear to characterize a folded structure. In this structure the two polar Arg and Lys sidechains sit on opposite sides (Fig.2A). The addition of a Pro residue (Peptide XXV) in position 7 causes a structural modification. The two type I β -turns are converted into two type II β -turns, the first one including the Pro residue. As a consequence the two Arg and Lys side chain are located on the same side of the molecule thus forming a hydrophilic (Fig.2B) environment.

Peptide XXX does not have a Pro residue as an N-terminal aminoacid and behaves like peptide XXIV, thus exhibiting two

type I β -turns.

In the longer peptides XXIII and Pro⁷-XXIII (extended in the C-terminus) one of the two β -turns becomes the initiator of a helical stretch that spans the peptide segment Ala¹³-Arg²⁰. The length of the helical segment remains essentially constant in both peptides while the β -turn exhibits the same differences already found for peptides XXIV and XXV. As a consequence the Arg and Lys side chains are again differently oriented in the longer peptides.

In conclusion these findings add convincing evidence that in the native pro-hormone a structure exists around the dibasic processing site. This structure is very likely to be characterized by one β -turn and a helical segment thus exposing a hydrophilic region formed by the Lys and Arg side chains. This hypothesis is on the other hand confirmed by biological activity data [5] that show a better activity for those peptides that favor a side on orientation of the two basic aminoacids. It is clear that any conclusive statements can only be drawn after careful investigations on the entire 1-20 peptide segment which includes the oxytocin ring. Work is now in progress on this peptide.

REFERENCES

- [1] A. BAX & D.G. DAVIS, "MLEV-17-Based two-dimensional homonuclear magnetization transfer spectroscopy", *J. Magn. Res.*, 65, p. 355-360 (1985).
- [2] A.A. BOTHNER-BY, R.L. STEPHENS, J. LEE, C.D. WARREN & R. JEANLOZ, "Structure determination of a tetrasaccharide: transient nuclear Overhauser effects in the rotating frame", *J. Am. Chem. Soc.*, 106, p. 811-813 (1984).
- [3] A. MOTTA, D. PICONE, T. TANCREDI & P.A. TEMUSSI, "NOE measurement on linear peptides in cryoprotective aqueous mixtures", *J. Magn. Res.*, 75, p. 364-370 (1987).
- [4] D. NEUHAUS & M. WILLIAMSON "The Nuclear Overhauser Effect", VCH Publishers Inc., New York (1989).
- [5] L. PAOLILLO, M. SIMONETTI, N. BRAKCH, G. D'AURIA, M. SAVIANO, M. DETTIN, M. RHOLAM, A. SCATTURIN, C. DI BELLO & P. COHEN, "Evidence for the presence of a secondary structure at the dibasic processing site of prohormone: the pro-ocytocin model"; *EMBO J.*, 11, p. 2389-2405 (1992).
- [6] U. PIANTINI, O.W. SORENSEN & R.R. ERNST, "Multiple quantum filters for elucidating NMR coupling networks", *J. Am. Chem. Soc.*, 104, p. 6800-6801 (1982).
- [7] I. PLEVRAKIS, C. CLAMAGIRAND, C. CREMINON, N.

BRAKCH, M. RHOLAM & P. COHEN,
"Proocytocin/Neurophysin Convertase from Bovine
Neurohypophysis and Corpus Luteum Secretory Granules:
Complete Purification, Structure-Function Relationships,
and Competitive Inhibitor", *Biochem.*, 28, p. 2705-2710
(1989).

- [8] **M. RHOLAM, P. NICOLAS & P. COHEN,** "Precursors
for peptide hormones share common secondary
structures forming features at the proteolytic processing
sites", *FEBS Lett.*, 207, p. 1-6 (1986).
- [9] **K. WUTRICH** "NMR of Proteins and Nucleic Acids",
Wiley, New York (1986).

**1 Department of Chemistry, University of Napoli,
80134 - Napoli**

**2 Institute of Industrial Chemistry, University of
Padova, 35131 - Padova**

TABLE 1

Chemical shifts δ (ppm) of peptides XXIV, XXV, XXX, XXIII and Pro7-XXIII in DMSO/H₂O at 298K.

Aminoacids		δ (ppm)				
		XXIV	XXV	XXX	XXIII	Pro7-XXIII
Pro7	NH		9.29;8.51;7.76			---
	α CH		4.90			---
	$\beta\beta'$ CH ₂		2.32;1.90			2.35;1.93
	$\gamma\gamma'$ CH ₂		1.90			1.93
	$\delta\delta'$ CH ₂		3.23			3.27
Leu8	NH	---	8.70	---	8.81	8.87
	α CH	3.85	4.36	3.84	3.88	4.32
	$\beta\beta'$ CH ₂	1.63	1.64	1.60	1.62	1.55
	γ CH	1.63	1.53	1.60	1.62	1.56
	$\delta\delta'$ CH ₃	0.93	0.90	0.89	0.91	0.90
Gly9	NH	8.84	8.35	8.94	8.82	8.44
	$\alpha\alpha'$ CH ₂	3.88	4.21	3.86	3.89	3.82
Gly10	NH	8.30	8.11	8.38	8.29	8.17
	$\alpha\alpha'$ CH ₂	3.81	3.80	3.82	3.85	3.83
Lys11	NH	8.12	8.08	7.78	8.15	8.15
	α CH	4.22	4.27	---	4.23	4.21
	$\beta\beta'$ CH ₂	1.68	1.67	1.67	1.70	1.71
	$\gamma\gamma'$ CH ₂	1.32	1.34	1.31	1.36	1.35
	$\delta\delta'$ CH ₂	1.55	1.56	1.53	1.58	1.58
	$\epsilon\epsilon'$ CH ₂	2.80	2.79	2.80	2.83	2.83
	ϵ NH ₃ ⁺	---	7.76	---	7.75	7.75
	NH	8.26	8.13	8.33	8.24	8.18
Arg12	α CH	4.22	4.25	---	4.22	4.21
	$\beta\beta'$ CH ₂	1.70	1.72	1.71	1.73	1.74
	$\gamma\gamma'$ CH ₂	1.55	1.53	1.54	1.58	1.59
	$\delta\delta'$ CH ₂	3.10	3.10	3.09	3.12	3.12
	ϵ NH	7.48	7.52	7.50	7.56	7.54
Ala13	NH	8.24	8.07	8.28	8.17	8.14
	α CH	4.27	4.27	4.24	4.23	4.21
	β CH ₃	1.24	1.23	1.22	1.28	1.26
Val14	NH	7.84	7.83	7.99	7.89	7.87
	α CH	4.10	4.09	4.07	4.04	4.04
	β CH	2.00	2.01	1.98	2.01	2.00
Leu15	$\gamma\gamma'$ CH ₃	0.88	0.85	0.83	0.87	0.86
	NH	8.28	7.84	8.16	8.05	8.03
	α CH	4.22	4.25	4.32	4.18	4.30
	$\beta\beta'$ CH ₂	1.55	1.57	1.50	1.47	1.49
	γ CH	1.55	1.49	1.50	1.47	1.49
Asp16	$\delta\delta'$ CH ₃	0.88	0.87	0.82	0.87	0.85
	NH			8.27	8.31	8.30
	α CH			4.24	4.56	4.55
	$\beta\beta'$ CH ₂			2.68	2.79;2.62	2.80;2.61

Leu17	NH	7.95	7.93
	α CH	4.22	4.22
	$\beta\beta'$ CH ₂	1.51	1.50
	γ CH	1.51	1.50
	$\delta\delta'$ CH ₃	0.85	0.85
Asp18	NH	8.26	8.25
	α CH	4.59	4.59
	$\beta\beta'$ CH ₂	2.83;2.63	2.82;2.62
	NH	7.64	7.62
Val19	α CH	4.09	4.09
	β CH	2.06	2.06
	$\gamma\gamma'$ CH ₃	0.85	0.85
	NH	8.07	8.06
Arg20	α CH	4.19	4.18
	$\beta\beta'$ CH ₂	1.76	1.76
	$\gamma\gamma'$ CH ₂	1.55	1.57
	$\delta\delta'$ CH ₂	3.13	3.12
	ϵ NH	7.46	7.46

TABLE 2

Sequential NOE contacts, backbone coupling constants (Hz) and temperature coefficients (ppb/K) measured in DMSO/H₂O.

a) Peptide XXIV

NH _{i+1}	L8	G9	G10	K11	R12	A13	V14	L15
dNN			G9	G10			A13	V14
dαN				G10		R12	A13	V14
³ J _{αNH}	---	5.5	5.6	7.3	7.6	7.1	8.4	6.2
Δδ/ΔT	---	-5.2	-4.9	-4.2	---	-5.2	-4.7	---

b) Peptide XXV

NH _{i+1}	P7	L8	G9	G10	K11	R12	A13	V14	L15
dNN				G9				A13	
dαN		P7	L8					A13	
³ J _{αNH}	-	8.0	5.7	5.8	7.6	7.9	7.2	9.1	8.1
Δδ/ΔT	-	-3.3	-5.2	-4.1	-4.0	-4.6	-4.2	-4.5	-4.0

c) Peptide XXX

NH _{i+1}	L8	G9	G10	K11	R12	A13	V14	L15	D16
dNN			G9				A13	V14	
dαN			G9	G10			A13	V14	
³ J _{αNH}	---	5.5	5.4	7.2	7.8	6.3	8.3	8.1	8.1
Δδ/ΔT	-3.8	-4.7	-4.1	-4.0	-5.0	-5.0	-4.9	-4.5	-5.6

TABLE 2 (cont.)

d) Peptide XXIII

NH _{i+1}	L8	G9	G10	K11	R12	A13	V14	L15	D16	L17	D18	V19	R20
dNN			G9	G10			A13	V14	L15	D16	L17	D18	V19
dαN		L8	G9	G10				V14	L15	D16	L17	D18	V19
³ J _{αNH}	—	5.6	5.2	6.7	7.7	7.0	7.3	6.1	6.7	7.3	8.3	7.7	8.3
Δδ/ΔT	—	-5.5	-5.2	-4.8	-5.7	-5.4	-5.1	-5.5	-6.5	-5.2	-4.4	-4.0	-4.9

e) Peptide Pro7-XXIII

NH _{i+1}	P	L8	G9	G10	K11	R12	A13	V14	L15	D16	L17	D18	V19	R20
dNN			L8	G9				A13	V14	L15	D16	L17	D18	V19
dαN				G9					V14	L15	D16	L17	D18	V19
³ J _{αNH}		7.0	6.2					7.3	7.3	6.8	7.3	7.2	7.9	7.3
Δδ/ΔT		-4.7	-6.5		-4.2	-5.8	-4.4	-4.7	-4.3	-6.2	-4.9	-4.3	-3.5	-4.4

**ASPETTI IDROGEOLOGICI E IDROGEOCHIMICI NEI CAMPI FLEGREI
SETTENTRIONALI NELL'AREA COMPRESA TRA I VULCANI ASTRONI E
PISANI**

Nota di Giuseppe ROLANDI(*) & Damiano STANZIONE(**)

Presentata dal Socio Bruno D'Argenio
Adunanza del 6-11-1993

RIASSUNTO

Lo studio idrogeologico-idrogeochimico di un'area interna dei Campi Flegrei ubicata nella Conca di Pisani, ha messo in evidenza alcune anomalie che si ricollegano alla presenza nel substrato di terreni vulcanici che mostrano differenti caratteristiche mineralogiche e petrografiche ascrivibili principalmente all'attività di Astroni e del Senga.

La presenza delle spesse coltri di pozzolana della formazione di Astroni in contrapposizione alla presenza di scorie e lave fratturate di Senga, determina localmente una variazione della trasmissività che condiziona la morfologia dei deflussi sotterranei nell'area.

La presenza dei terreni vulcanici e la variazione di quota dell'interfaccia acqua di mare-acqua di falda per effetto di emungimenti localizzati, costituiscono, d'altro canto, le principali cause di inquinamento inorganico naturale che condizionano le caratteristiche idrogeochimiche alle acque sotterranee della zona. Unitamente a questi fattori è stato messo in evidenza anche l'esistenza di un inquinamento di origine antropica, essenzialmente di natura organica, le cui relazioni con le direzioni dei deflussi sotterranei evidenzia chiaramente una connessione con le aree urbanizzate della zona. La presenza nella stessa zona di impianti di smaltimento di rifiuti solidi urbani, i cui invasi risultano adeguatamente impermeabilizzati, oltre a non influire su questo particolare tipo di inquinamento, non contribuisce ad incrementare la concentrazione di ioni inorganici indesiderabili (metalli pesanti) nelle acque della falda, i cui contenuti sono notevolmente inferiori a quelli massimi previsti dalla vigente normativa.

Parole chiave: Astroni; Senga; anomalie idrogeochimiche; superficie piezometrica; inquinamento.

Abstract

Hydrogeochemical and hydrogeological investigations of waters from "Conca dei Pisani" area (Campi Flegrei) pointed out anomalies related to the different mineralogical petrochemical features of the volcanic terrains outcropping in this area, mainly owing to the Astroni and to the Senga volcanic activity. The Astroni products consists of thick ash-banks (best known as Pozzolana) whereas the Senga sequence is mainly made up of scoria fragments and fractured lavas. These different lithological features cause different water transmissivity and strictly control the different shape of deep water flows.

Heavy inorganic pollution may be ascribed to the presence of volcanic terrains and to the strong local exploitations which cause variations in the deepness of the marine water-fresh water interface. The anthropic pollution in the area is strongly related to the location of urbanized areas, as the directions of deep water flows testify. The waste deposits located in the area seem to have been well impermeabilized with respect to the water table and neither to influence organic pollution nor to increase heavy metal concentration in water, very lower than the contents allowed by law.

Key words: Astroni; Senga; hydrogeochemical anomalies; water table; pollution.

Premessa

Recenti studi idrogeologici (Celico et al. 1988,89,90) hanno messo in evidenza alcuni importanti aspetti della circolazione idrica sotterranea dell'area flegrea e delle caratteristiche idrogeochimiche delle acque. In particolare la falda di quest'area presenta:

1) un' alimentazione autonoma ed indipendente dalla falda della Piana Campana alimentata dai massicci carbonatici appenninici, come dimostra il basso contenuto in HCO_3^- ;

2) una diminuzione della trasmissività verso la costa che viene spiegata ammettendo un'alimentazione aggiuntiva dal basso, dovuta probabilmente a risalita dell'interfaccia acqua di falda-acqua marina, ed/o a risalita di acque profonde connesse con circuiti idrotermali;

3) marcate anomalie dei valori di Cl^- e della salinità totale (TDS) dovute ai mescolamenti tra i due tipi di acque, riscontrate nell'ambito della fascia costiera, come pure nelle zone più esterne dell'area flegrea (Quarto, Giugliano), giustificabili in quest'ultimo caso solamente con apporti di acque profonde di origine idrotermale, composizionalmente simili all'acqua di mare.

Con il presente studio sono stati approfonditi ulteriormente questi aspetti nell'ambito di un'area più ristretta comprendente la Conca di Pisani e le zone ad

essa limitrofi, che presenta tuttavia la caratteristica di essere ubicata in posizione intermedia tra la zona flegrea costiera, caratterizzata da un vulcanismo recente di epoca storica (eruzione del M. Nuovo del 1538), da diffuso idrotermalismo, e da movimenti bradisismici, e la zona flegrea più esterna, ormai da tempo non più interessata da attività vulcanica.

Essendo la falda di quest'area caratterizzata da diverse anomalie geochimiche, derivanti da fattori di inquinamento dovuti a cause naturali ed antropiche, si è ritenuto altresì interessante studiare quest'aspetto e le loro eventuali connessioni sia con le discariche di rifiuti solidi urbani in essa ubicate, sia con le adiacenti aree densamente urbanizzate.

1 - CARATTERISTICHE GEOLOGICHE E VULCANOLOGICHE DELL'AREA

L'entroterra flegreo a N-NE dalla fascia costiera risulta caratterizzato da chiare evidenze di dislocazioni vulcano-tettoniche, e dalla presenza di morfologie vulcaniche integre e relitte (fig. 1).

Dall'esame dei lineamenti morfostrutturali si osserva che quest'area risulta ribassata nelle zone marginali, rispettivamente dalla faglia del Gauro, con direzione N-S e da quella ad andamento WNW-ESE di S. Martino-Traiano. In essa si rinvencono inoltre gli edifici vulcanici ben conservati di Astroni e del Senga, e le forme relitte di edifici vulcanici ancora ben evidenti in campagna (Montagna Spaccata, S. Martino, Gallo-Pisani). La morfologia circolare del M. Oliveto presente verso Est, può essere invece considerata come una parte dell'antica struttura di tufo giallo raccordabile alla morfologia circolare di Pianura, addolcita nel versante occidentale dai prodotti dell'attività più recente di Pisani ed Astroni (fig. 1).

Sulla base di un dettagliato esame stratigrafico e morfostrutturale (Forino e Matania 1986) è stata ricostruita la situazione cronologica degli eventi vulcanici e vulcano-tettonici più significativi:

1) eruzione del vulcano di S. Martino, il cui centro eruttivo doveva originariamente ubicarsi nella piana di S. Vito;

2) collassi ad est del Gauro e probabilmente anche della struttura del vulcano di S. Martino, lungo le faglie con generale componente direzionale N-S;

3) eruzione dei vulcani Montagna Spaccata e Gallo-Pisani;

4) collassi vulcano-tettonici di quest'ultimi edifici e ribassamento del settore meridionale secondo la faglia ad andamento WNW-ESE di S. Martino-Traiano;

5) eruzioni di Astroni e Senga.

Queste ultime attività, che con i loro prodotti hanno interessato massicciamente l'area presa in considerazione verranno di seguito descritte in dettaglio.

L'attività di Astroni risale a circa 3700 anni b.p. (Alessio et al. 1971-73); l'apparato vulcanico si presenta morfologicamente con una forma svasata tipica dei "tuff

ring" (Heiken 1971) (fig.2a) la cui costruzione deriva quasi totalmente da fasi eruttive controllate da una significativa interazione acqua-magma.

I segni di queste interazioni sono visibili dal fatto che l'edificio vulcanico è quasi totalmente costruito da prodotti cineritici grigio chiari, altamente fragmentati (pozzolane) con carattere da "base surge", interessate da chiare evidenze deposizionali di turbolenza che si rendono visibili attraverso la presenza di numerose strutture sedimentarie tipo "sand waves", le quali si modificano via via nella forma, da massive a planari, allontanandosi dal centro eruttivo (fig. 2b). Nel settore N-orientale le pozzolane sono ricoperte da un deposito emesso nella fase finale della stessa eruzione che presenta i caratteri di un "pumice flow" (FIG.2b) con tessitura grossolana e massiva.

Il complesso vulcanico Senga Fossa Lupara è situato nel settore orientale dei Campi Flegrei, a Nord di Astroni e ad Est di Montagna Spaccata.

I suoi tre distinti recinti craterici (FIG.2c), noti in letteratura, stanno ad indicare che nello stesso luogo si sono succeduti nel tempo differenti eventi esplosivi.

Il cratere più esterno costituitosi a seguito di un'attività esplosiva di tipo stromboliano-vulcaniano con alternanze di lanci di scorie ed emissioni esplosive di ceneri altamente fragmentate, si identifica con l'apparato di Senga.

L'attività esplosiva che origina la parte più interna che doveva dare per il passato l'impressione di una struttura vulcanica ben costituita di tipo domico, si chiude con la fase finale esplosiva che forma il cratere di piccole dimensioni di Fossa Lupara (FIG.2c). Una sintesi dei prodotti emessi durante l'attività del Senga viene riportata nella Tab. 1 tratta dal lavoro di De Lorenzo e Simotomai (1914)

TAB. I

CONO CENTRALE	II. Lave scoriacee e bombe
	I. Lave massicce
CRATERE INTERNO	II. Lave scoriacee
	I. Materiali frammentarii autogeni
CRATERE ESTERNO	IV. Materiali frammentarii autogeni
	III. Lave scoriacee
	II. Materiali frammentarii e più minuti: nella maggior parte autogeni
	I. Materiali frammentarii coi blocchi allogeni

2- MORFOLOGIA DELLA SUPERFICIE PIEZOMETRICA

La ricostruzione morfologica della superficie piezometrica è stata ricavata utilizzando 7 pozzi presenti nell'area compresa tra Pisani e Astroni (FIG.3), sui quali è stata misurata la profondità del livello statico della falda nel periodo Dicembre '92-Luglio '93. Le misure delle quote di riferimento dei bocca-fori sono state eseguite con una livellazione di precisione utilizzando capisaldi di appoggio della rete IGM. Per i pozzi in costante esercizio (1,3,5), la misura è stata fatta dopo 12 ore di inattività con morfologia piezometrica pressochè indisturbata.

Nelle fig. 4a,b viene riportata la rappresentazione grafica delle curve isopiezometriche relativamente ai periodi dicembre '92 - Luglio '93. Nella conca di Pisani la falda raggiunge la massima quota di 25 metri s.l.m. e presenta due distinte zone di drenaggio delimitate da uno spartiacque sotterraneo: quella occidentale in direzione di Traversa Campana-Senga, caratterizzata da un incremento nella distanza delle isopiezometriche tra la quota di 20-24m s.l.m. quella meridionale, in direzione di Astroni, caratterizzata invece da una più bassa trasmissività in corrispondenza dell'infittimento delle isopiezometriche.

Mentre nella zona occidentale la presenza di corpi lavici fratturati e/o piroclastiti a grana grossolana non costituisce un efficace impedimento al deflusso idrico sotterraneo, nella zona meridionale il baluardo delle pozzolane di Astroni agisce in tal senso, facendo diminuire la trasmissività dell'acquifero, come si evince chiaramente anche dai rapporti esistenti tra le caratteristiche granulometriche delle pozzolane e i relativi dati di permeabilità (FIG.5).

3- DATI IDROGEOCHIMICI

Sono stati eseguiti nel periodo Dicembre '92-Luglio '93 dei rilevamenti idrogeochimici sulla falda mediante prelievi sistematici di campioni d'acqua dai sette pozzi utilizzati per la misura dei livelli piezometrici; sono stati prelevati campioni anche dal pozzo n°6 non utilizzabile per le suddette misure (FIG. 3). Per la maggior parte di essi (pozzi 1,2,3,4,5,6) i dati sono relativi ad un anno idrogeologico (1992-93), per i rimanenti (pozzi 7,8) ai soli periodi primaverile ed estivo; i risultati delle analisi sono stati riportati nelle tabelle allegate (All 1). Sono state quindi evidenziate anomalie e variazioni dei principali parametri geochimici durante tutto il periodo considerato e successivamente è stato effettuato un confronto con i dati esistenti per l'intera area flegrea. Osserviamo in primo

luogo che nell'arco di tempo preso in considerazione il quadro generale dei dati relativi alle acque di ciascun pozzo, salvo qualche eccezione, risulta interessato da una sostanziale omogeneità nel contenuto dei vari ioni (vedi tab. allegate). Tale costanza dei dati si mantiene anche per tempi più lunghi, com'è dimostrato ad esempio dal confronto dei risultati analitici relativi alle acque dei pozzi 3,5,6 effettuati nell'anno 1988 (all. 2); si osserva infatti tranne lievi difformità nelle concentrazioni di alcuni ioni, che le caratteristiche idrogeochimiche sostanziali di ciascun campione si sono mantenute inalterate nel tempo. Sulla base di tale evidenza, al fine di poter effettuare un confronto omogeneo tra tutti i dati geochimici rilevati, si è ritenuto opportuno prendere in considerazione le sole analisi relative al Marzo '93, dalle quali vengono riportate nella FIG. 5 a,b le variazioni dei principali parametri geochimici nel diagramma di Schoeller.

Si distinguono chiaramente due gruppi di dati, ciascuno dei quali presenta una sua precisa caratteristica negli andamenti variazionali dei rapporti caratteristici:

- nel primo gruppo (FIG. 6a) comprendente le acque dei pozzi 1,3,6,7, tutti ubicati presso il margine sud-occidentale dell'area, si riconosce una sostanziale similitudine nei rapporti caratteristici tra i parametri chimici. Si caratterizzano in particolare per l'elevato contenuto in alcali e Cl^- e per valori più elevati della salinità totale (TDS).

- Nel secondo gruppo (FIG. 6b) comprendente le acque dei pozzi 2, 4,5,8 ubicati nella parte più interna dell'area in studio, si riconoscono invece concentrazioni minori di alcali e Cl^- , bassi valori della salinità totale e valori estremamente variabili del rapporto caratteristico $\text{SO}_4^{--}/\text{HCO}_3^-$.

Nel pozzo n° 8 in particolare, l'anomala concentrazione di ioni SO_4^{--} (circa 250 mg/lit) sulla cui presenza ci soffermeremo nel prossimo capitolo, influenza considerevolmente il valore della salinità totale, il quale, quindi, solo apparentemente si discosta dai bassi valori riscontrati nelle acque dei pozzi 4 e 5. Per le acque del pozzo n°2, infine, debbono farsi alcune considerazioni particolari. Come si osserva dalle tabelle allegate, le analisi relative ai mesi di Gennaio e Febbraio '93, differiscono significativamente da quelle del periodo Marzo-Luglio '93, presentando marcate anomalie particolarmente per Fe, Mn, Ca, Mg, chiaramente in contrasto anche con i dati rilevati negli altri pozzi. Tali valori anomali sono stati ottenuti per prelievi effettuati dopo 15 minuti di emungimento. Protraendo successivamente i tempi di prelievo a tre ore, si è registrato un totale cambiamento della composizione chimica delle acque. Si è verificato, in pratica, che a seguito della lunga inattività del pozzo si instaurata una consistente erosione delle tubazioni con relativa solubilizzazione dei Fe^{++} e Mn^{++} e quindi del ghiaietto calcareo che funge da filtro, determinando le osservate anomalie evidenziate per tempi brevi di emungimento, le

quali tendono ad attenuarsi in modo consistente per tempi più lunghi.

Le concentrazioni saline dei pozzi n°2 e n°8 pertanto, a causa di queste alterazioni secondarie, debbono essere considerate in modo cautelativo per la caratterizzazione geochimica della falda.

Dal confronto dei dati rilevati nell'area in studio con quelli disponibili per l'area flegrea si rileva una similitudine tra il primo gruppo di dati e quei campioni prelevati nella zona interna flegrea che presentano valori anomali di Cl^- e TDS rispetto ai valori medi riscontrati nella stessa area (Celico et Al. 1990). Il secondo gruppo invece è confrontabile relativamente a questi 2 parametri, con i valori che normalmente si riscontrano nella zona flegrea, ovvero: elevato contenuto in Na e K, valori del Cl inferiori a 100 mg/l, salinità totale di circa 0,5 gr/l (Celico et Al 1986-87).

Queste relazioni tra i due gruppi di acque sono state evidenziate nelle FIG. 7a,b, si osserva che le concentrazioni di Cl^- e TDS proiettate in funzione della diversa ubicazione areale dei pozzi mostrano evidenti correlazioni: a concentrazioni più elevate di Cl^- nella zona occidentale trovano riscontro i valori più elevati della salinità e viceversa per la zona orientale.

Mentre i valori più elevati di Cl^- e TDS suggeriscono un'influenza della componente marina, sul cui meccanismo di mescolamento ci soffermeremo più in dettaglio nel prossimo capitolo, una diversa spiegazione necessita la presenza dei valori molto bassi della salinità totale che si riscontrano nelle acque dei pozzi 4 e 5, i quali essendo notevolmente inferiori rispetto ai valori riscontrati nel primo gruppo e più in generale ai valori medi dell'area flegrea, rappresentano una vera e propria anomalia di segno opposto.

Questi valori anomali possono trovare una loro giustificazione nel regime idrogeologico dell'area. Il pozzo 4 si trova esattamente sullo spartiacque sotterraneo che funge da zona di alimentazione dalla quale l'acqua perviene dalle zone di drenaggio. La direzione di drenaggio preferenziale comprendente i pozzi 4 e 5 è quella caratterizzata da una più elevata trasmissività dell'acquifero (FIG. 4) ed è quindi del tutto normale che lungo tale direttrice le acque presentino una bassa concentrazione salina. In corrispondenza dei pozzi 1, 3 e 6 questo parametro aumenta, per effetto della risalita localizzata dell'interfaccia acqua di falda-acqua marina, dovuto all'emungimento.

Ne', d'altra parte, queste diminuzioni della salinità totale si possono imputare ad un emungimento intensivo dal momento che il pozzo n° 4 risulta poco utilizzato e le sue acque presentano il più basso valore in assoluto della concentrazione salina.

4 VALUTAZIONE DELL'INQUINAMENTO IDRICO SOTTERRANEO

Ci soffermeremo ora su i meccanismi che condizionano le caratteristiche idrogeochimiche della falda acquifera, sia in relazione alle cause che hanno prodotto le anomalie precedentemente discusse e che definiamo naturali, sia a cause nelle quali la presenza dell'uomo è rilevante e che pertanto definiamo antropiche.

Occupiamoci in primo luogo del principale meccanismo d'inquinamento dovuto a cause del tutto naturali, quale lo interscambio acqua dolce-acqua marina.

Celico et Al (1991) hanno messo in evidenza la presenza di anomalie idrogeochimiche nei valori di Cl^- e TDS nella zona costiera e nelle aree più interne dei Campi Flegrei. Nella zona costiera gli elevati valori di questi due parametri (TDS=800-1800 mg/l e $\text{Cl}^-=150-350$ mg/l) possono essere agevolmente spiegati con fenomeni d'inquinamento causati da emungimenti che determinano una risalita dell'interfaccia acqua dolce-acqua salata. Nelle zone più interne (Quarto, Giugliano), data la notevole profondità dell'interfaccia (300-600 metri), i valori anomali (TDS circa 800 mg/l, $\text{Cl}^-=100-150$ mg/l) si giustificerebbero solo con una risalita di acque profonde composizionalmente simili a quelle del mare. Poiché l'area da noi presa in considerazione dista mediamente dalla costa circa 3-4 km, rappresentando una sorta di area di transizione tra la fascia costiera e le aree più interne, risulta interessante comprendere quale dei due meccanismi ipotizzati è più efficace nel determinare l'inquinamento salino della falda locale.

Celico et Al (1990), limitatamente alla fascia costiera, ritengono probabile, come si è detto, una risalita dell'interfaccia acqua di falda- acqua marina dovuto all'emungimento localizzato dai pozzi anche se non escludono una possibile risalita di acque profonde anche in quest'area, ritenendo quindi possibili entrambi i meccanismi d'inquinamento. A nostro avviso, spostando il problema all'area presa in considerazione, la non eccessiva profondità dell'interfaccia, unitamente alla particolare costanza nel tempo della concentrazione salina ed in particolare del Cl^- , per periodi lunghi, fa ritenere più probabile la prima ipotesi, ovvero di un inquinamento marino causato dagli emungimenti e localizzato nella zona esterna prospiciente alla fascia costiera. Altrettanto importanti nella caratterizzazione geochimica della falda si rivelano i processi di interazione acqua-roccia, nella fattispecie, rocce piroclastiche trachitico potassiche vetrose, che determinano, per idrolisi del vetro, un arricchimento in alcali, con prevalenza dello ione K^+ . Questi meccanismi risultano particolarmente attivi, ancora una volta, nella zona marginale occidentale dove insistono i campioni n° 1, 3, 6, 7, agevolati in una certa misura anche da temperature elevate presenti in profondità. Si riscontra infatti che le acque di questi pozzi presentano

temperature superficiali maggiori rispetto a quelli della zona più interna, evidentemente in relazione alle più alte temperature del serbatoio profondo. Inquinamento marino e processi di interscambio acqua-roccia, favoriscono dunque la presenza di una più elevata concentrazione di ioni alcalini e tra questi di Li, che proprio in questa zona presenta un consistente arricchimento.

L'incremento nella concentrazione degli alcali determina a sua volta un aumento del pH riscontrato puntualmente per le acque della zona occidentale che presentano un carattere alcalino.

Quest'ultimo fattore, com'è noto, ha influenza anche sulla solubilità di Fe^{++} e Mn^{++} la cui presenza nelle acque è favorita da valori del pH acidi. Nei campioni 1, 6, 7 con pH alcalino, questi elementi sono assenti o presenti in concentrazioni trascurabili. Negli altri campioni il Fe^{++} è sempre presente in quantità trascurabili, mentre Mn^{++} , relativamente ai pozzi 3, 4, 5 è presente in concentrazioni superiori a quelle indicate per le acque potabili (0.10 mg/lt), come è tipico per le falde interessanti rocce piroclastiche.

Appare invece singolare in tale contesto l'elevata concentrazione di ioni K^+ che caratterizza le acque del pozzo n° 3 come pure l'elevata concentrazione di ioni SO_4^{--} riscontrata nel pozzo n° 8.

Per spiegare la prima anomalia osserviamo che il pozzo n° 3 è posizionato nella zona centrale del cratere Senga, spingendosi per una profondità di oltre 96 mt, e penetrando per un notevole tratto nel banco di lave fratturato, che, come già osservato, caratterizza la zona craterica dell'apparato più interno di questo complesso vulcanico e nel quale è ubicata la falda. Risulta altamente probabile quindi, che le acque della falda subiscano localmente un ulteriore apporto da parte di fluidi idrotermali ricchi di K^+ (Orville 1963).

Per spiegare gli elevati valori in SO_4^{--} riscontrati nel pozzo n° 8 si potrebbero, invece, invocare processi che portano alla formazione di solfati inorganici. Si ritiene, tuttavia, che una così elevata concentrazione di questo ione (250 mg/lt), in posizione molto localizzata, degenerante rispetto ai normali valori riscontrati negli altri pozzi, possa essere dovuta a fattori di inquinamento antropico¹, come mostrato anche dagli altri valori dello ione ammonio.

Oltre alle cause di inquinamento naturale della falda profonda, infatti, possono concorrere alla modificazione delle sue caratteristiche idrogeochimiche anche cause aventi questa origine, che nell'area flegrea sono piuttosto frequenti, in quanto sono gli stessi pozzi che mettono rapidamente in comunicazione più falde sovrapposte, delle quali quelle più superficiali risultano nella maggior parte dei casi inquinate. Questi aspetti

¹Non si può non denunciare in questa sede lo spettacolo deprimente a cui uno di noi (G. Rolandi) ha assistito durante i prelievi effettuati al pozzo n° 8. Dopo quasi un'ora di emungimento continuo l'acqua che fuoriusciva dal pozzo presentava un colore verde-marrone unitamente ad un cattivo odore che rapidamente si diffondeva nella zona circostante, non accennando a diminuire durante tutto il periodo di emungimento.

nell'area in studio rivestono un'importanza ancora maggiore per la presenza di discariche di rifiuti solidi urbani (RSU). Si comprende pertanto l'importanza di valutare, accanto ai fenomeni di inquinamento naturale anche quelli di origine antropica al fine di poter delineare un quadro d'insieme di tutte le anomalie geochimiche della falda in rapporto alla loro origine.

In tutte le acque analizzate sono presenti ioni NH_4^+ , NO_3^- , NO_2^- che com'è noto, rappresentano un indice della degradazione delle sostanze organiche, le cui concentrazioni in generale rientrano nell'ambito dello standard di qualità delle acque destinate al consumo umano². Appare tuttavia di fondamentale importanza stabilire se la presenza di tali sostanze risulti o meno in relazione ad infiltrazioni dalla superficie di liquidi organici. A tale riguardo è risultato indispensabile una correlazione di questi parametri con i risultati delle analisi batteriologiche, effettuate anch'esse sistematicamente nel corso dell'anno idrogeologico considerato (all. 3). Alcuni campioni di acque (1,6) sono risultati del tutto privi di germi patogeni, o con presenza scarsamente significativa da non inficiare il giudizio di potabilità dell'acqua stessa. Un altro gruppo di campioni (3,5,7) ha mostrato un quadro microbiologico contrastante nel senso che le determinazioni numeriche di coliformi e streptococchi fecali per alcuni periodi sono risultati nella norma, per altri hanno evidenziato una significativa contaminazione. Un terzo gruppo di campioni, infine (2,4,8), è risultato costantemente affetto da inquinamento da germi patogeni (FIG.8).

Queste risultanze, tenuto conto anche dell'andamento generale della circolazione idrica sotterranea in rapporto all'ubicazione delle aree urbanizzate ed agli impianti di smaltimento RSU (FIG. 80), offrono un quadro sufficientemente chiaro del meccanismo di inquinamento da contaminazioni batteriche. Appare evidente, infatti, che la falda di quest'area riceve dagli insediamenti urbani di Pisani e probabilmente anche da quelli limitrofi (Quarto), del tutto privi di scarichi fognari, il suo contenuto di germi patogeni, con il quale certamente si correla anche il contenuto più elevato di ioni NH_4^+ riscontrato nei rispettivi campioni di acqua prelevata dai pozzi 8 e 4. Per tutti gli altri pozzi situati verso Ovest, i risultati delle analisi batteriologiche non mostrano una evidente correlazione con il contenuto di NH_4^+ , NO_3^- , NO_2^- , peraltro presenti nei limiti delle concentrazioni normali, evidenziando la graduale scomparsa del contenuto di germi patogeni in direzione dei pozzi n° 1 e 6, le cui acque risultano del tutto prive di inquinamento organico.

Prendendo, infine in considerazione la presenza della falda di quegli elementi considerati "tossici" e "indesiderabili" che normalmente comportano un rischio di inquinamento per le acque destinate al consumo umano, si osserva che in tutti i campioni analizzati le loro

²D. P. Min. 8/2/85, n°41, in attuaz. direttiva CEE n° 80/778

concentrazioni risultano di gran lunga al di sotto di quelle massime contemplate dalla vigente legislazione².

Questi dati confermano in definitiva che, da un lato i processi di filtrazione naturale della falda attraverso i terreni pozzolanici della formazione di Astroni con andamento generale dei deflussi verso il mare (FIG. 4), sono particolarmente efficaci nell'abbattimento della contaminazioni batteriche per percorsi anche inferiori al km, dall'altro che gli impianti di smaltimento rifiuti presenti in quest'area non concorrono alla produzione di inquinamento organico ed inorganico.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

L'area Pisani-Astroni ubicata, a N-NE dalla fascia costiera flegrea risulta costituita da più formazioni vulcaniche (Astroni, Senga, Pisani) che condizionano localmente, in virtù delle loro differenti caratteristiche di permeabilità, gli andamenti dei deflussi sotterranei.

Le caratteristiche geochimiche delle acque risultano condizionate per una parte dalla maggiore trasmissività della falda (pozzi 4 e 5), per un'altra delle risalite localizzate dovute agli emungimenti dell'interfaccia acqua di mare-acqua di falda (pozzi 1,3,6,7), per un'altra ancora dagli interscambi acqua-roccia (pozzo 3) nel settore orientale, e da fattori di inquinamento antropico (pozzi 2 e 8) nel settore occidentale.

Si vengono a distinguere nel complesso due gruppi di acque con differenti caratteristiche chimiche : a) acque di tipo bicarbonato alcaline nel settore occidentale; b) acque clorurate-bicarbonato alcalinocalciche nel settore orientale.

Com'è tipico degli acquiferi in rocce piroclastiche (Celico et Al. 1990), le caratteristiche idrogeochimiche globali delle falde si mantengono costanti nel tempo, salvo in punti localizzati in cui l'inquinamento di origine antropica tende a sovrapporre i suoi effetti rispetto all'inquinamento dovuto a cause naturali. E' questo il caso dell'area Astroni-Pisani nella quale l'inquinamento antropico di origine organica è da porre in relazione alla presenza di aree urbanizzate prive di scarichi fognari. Non sussistendo, d'altra parte, un inquinamento in atto di tipo inorganico dovuto ad elevate concentrazioni di metalli pesanti, si deve escludere una relazione tra le diverse forme di inquinamento e la presenza di impianti di smaltimento RSU, le cui opere di impermeabilizzazione degli invasi si sono rivelate particolarmente efficaci nella salvaguardia delle acque di falda.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano la Soc. DIFRABI S.p.A. per aver consentito la realizzazione di questo studio.

BIBLIOGRAFIA

Alessio M., Bella F., Improta S., Belluomini G., Calderoni G., Cortesi C., Turi B.- University of Rome Carbon - 14 dates - Radiocarbon 15.1 : 165 178 (1973)

Celico P., De Gennaro M., Pagano D., Ronca A., Stanzione D., Vallario A. - Idrogeologia ed idrogeochimica dei Campi Flegrei. Impostazione delle problematiche e primi risultati dello studio. Atti conv. "Bradismo e fenomeni connessi", Il trim.,33-42, 3/4/86, Napoli (1986).

Celico P., De Gennaro M., Pagano D., Ronca A., Stanzione D., Vallario A. - Idrogeologia ed idrogeochimica dei Campi Flegrei: relazioni tra chimismo delle acque e idrodinamica sotterranea. Atti Conv. " Bradismo e fenomeni connessi ", III trim. , 94-100, 19-20/1/87 (1987).

Celico P., De Vita P., Nikzad F., Stanzione D., Vallario A. - Schema idrogeologico ed idrogeochimico dei Campi Flegrei (NA). I convegno dei giovani ricercatori in Geologia Applicata . Napoli (1990).

De Lorenzo G., Simotomai H. I crateri di Fossa Lupara nei Campi Flegrei. Atti Acc. Sc fis. e Mat. , serie 2, n 5 , vol. 16; 1-27 (1915).

Forino M., Matania A. - Analisi morfostrutturale e vulcanologica della zona orientale dei Campi Flegrei. Tesi di laurea in vulcanologia . Università di Napoli. Relatore G. Rolandi (1986).

Heiken G. H. - Tuff Rings: exemples from the Forth Rock-Christmas lave valley basin , South Central Oregon. J. Geoph. Res. 76 : 5615-5626 (1971).

Orville P. M. (1963) . Alkali ion exchange between vapor and feldspar phases - Am. Journ. Sei, 216-237 (1963).

FIGURE

FIG. 1 - carta geomorfologica del settore N-NE dei Campi Flegrei

FIG. 2 - A) caratteristiche morfologiche del vulcano Astroni , B) distribuzione dei prodotti in relazione alle diverse facies vulcanologiche (da Di Filippo et Al. 1991), C) caratteristiche morfologiche del complesso vulcanico Senga-Fossa Lupara

FIG. 3 - ubicazione dei pozzi

FIG. 4 - curve isopiezometriche nei periodi Dicembre '92-Marzo '93 (a) e Giugno -Agosto 93 (b). Nelle figg. viene riportata anche l'ubicazione dei sette pozzi (1,2,3,4,5,7,8) utilizzati per la misura dei livelli piezometrici. L'ottavo pozzo (n° 6), non essendo strutturato per tale scopo, è stato utilizzato solo per i prelievi idrogeochimici.

FIG.5 - valori della permeabilità dei prodotti di Astroni prelevati a diverse profondità, effettuate in laboratorio (permeabilità a carico variabile) e caratteri granulometrici della facies pozzolanica.

FIG. 6 - diagrammi di Schoeller relativi ai due gruppi di campioni caratterizzati da diverse concentrazioni ioniche prelevati nell'area in studio.

FIG. 7 - variazioni delle concentrazioni di Cl (a) e TDS (b) in funzione della ubicazione areale dei pozzi.

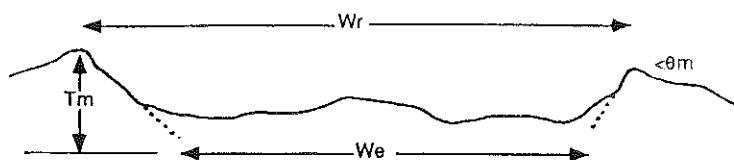
FIG. 8 - l'andamento sotterraneo dei deflussi idrici in relazione all'ubicazione delle aree densamente urbanizzate e degli impianti di smaltimento RSU presenti nell'area in studio.

In figura vengono anche individuate le zone con diverso grado di inquinamento.

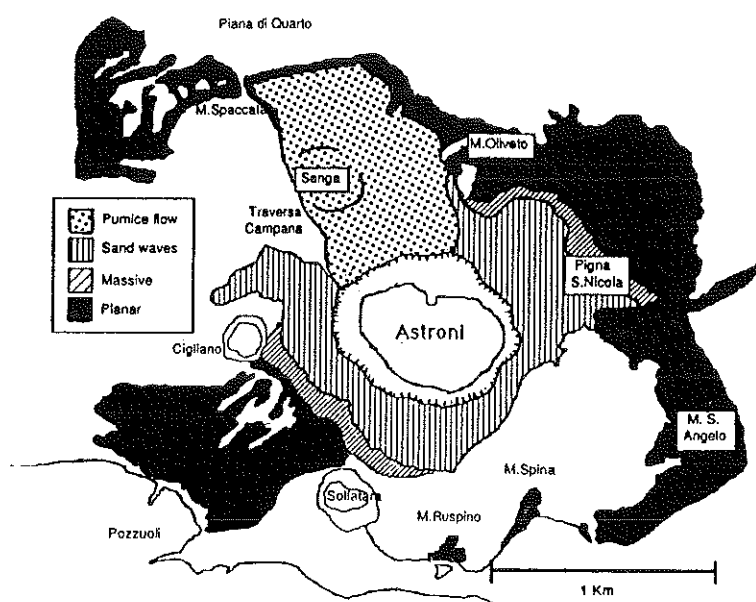
CARTA MORFOSTRUTTURALE DELL' AREA NORD ORIENTALE FLEGREA



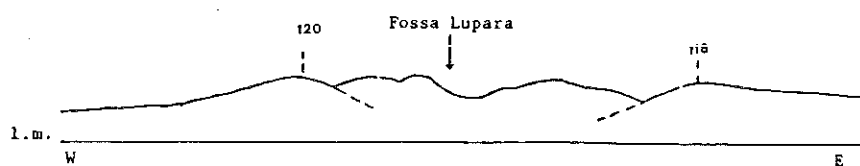
FIG. 1



A



B



C

FIG. 2

UBICAZIONE DEI POZZI (1:10000)

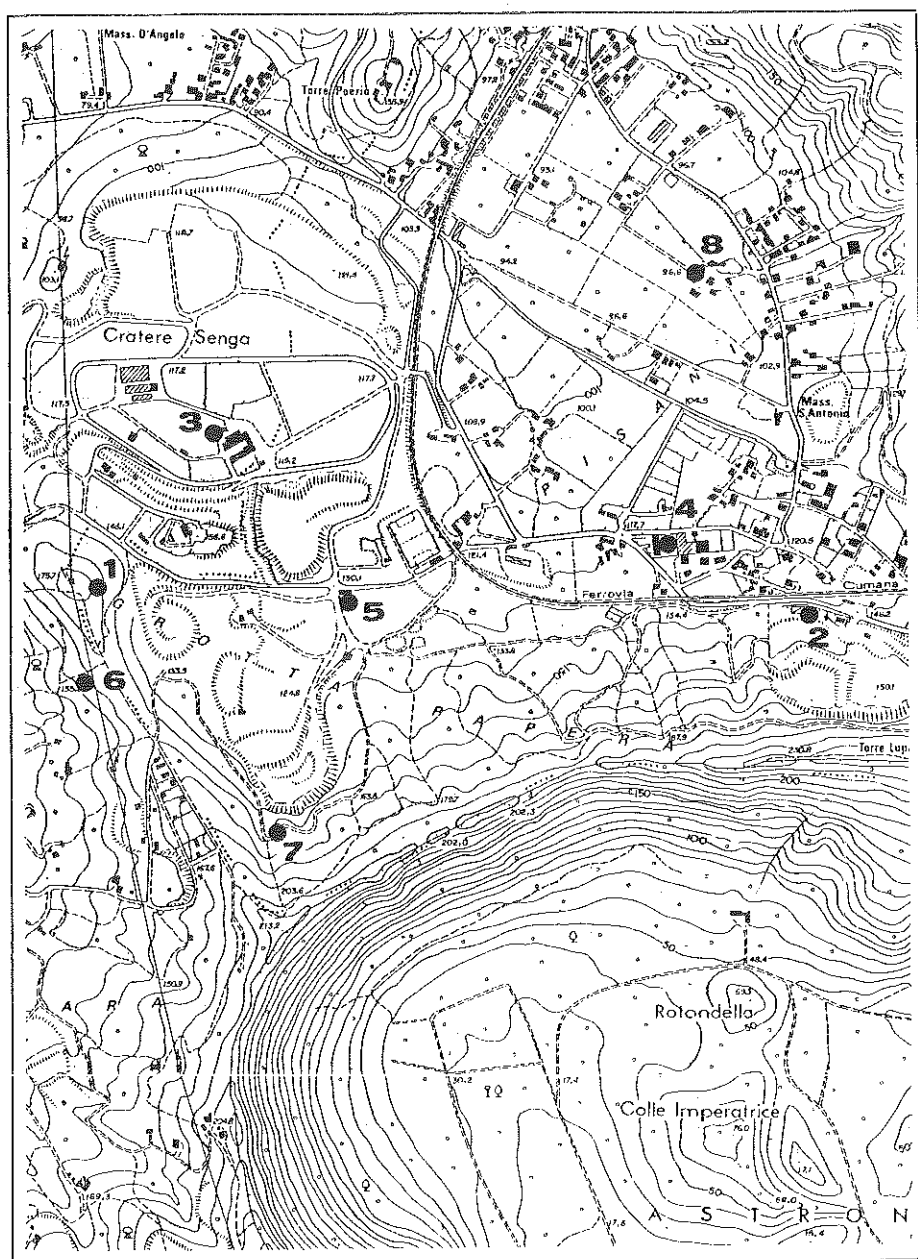


FIG. 3

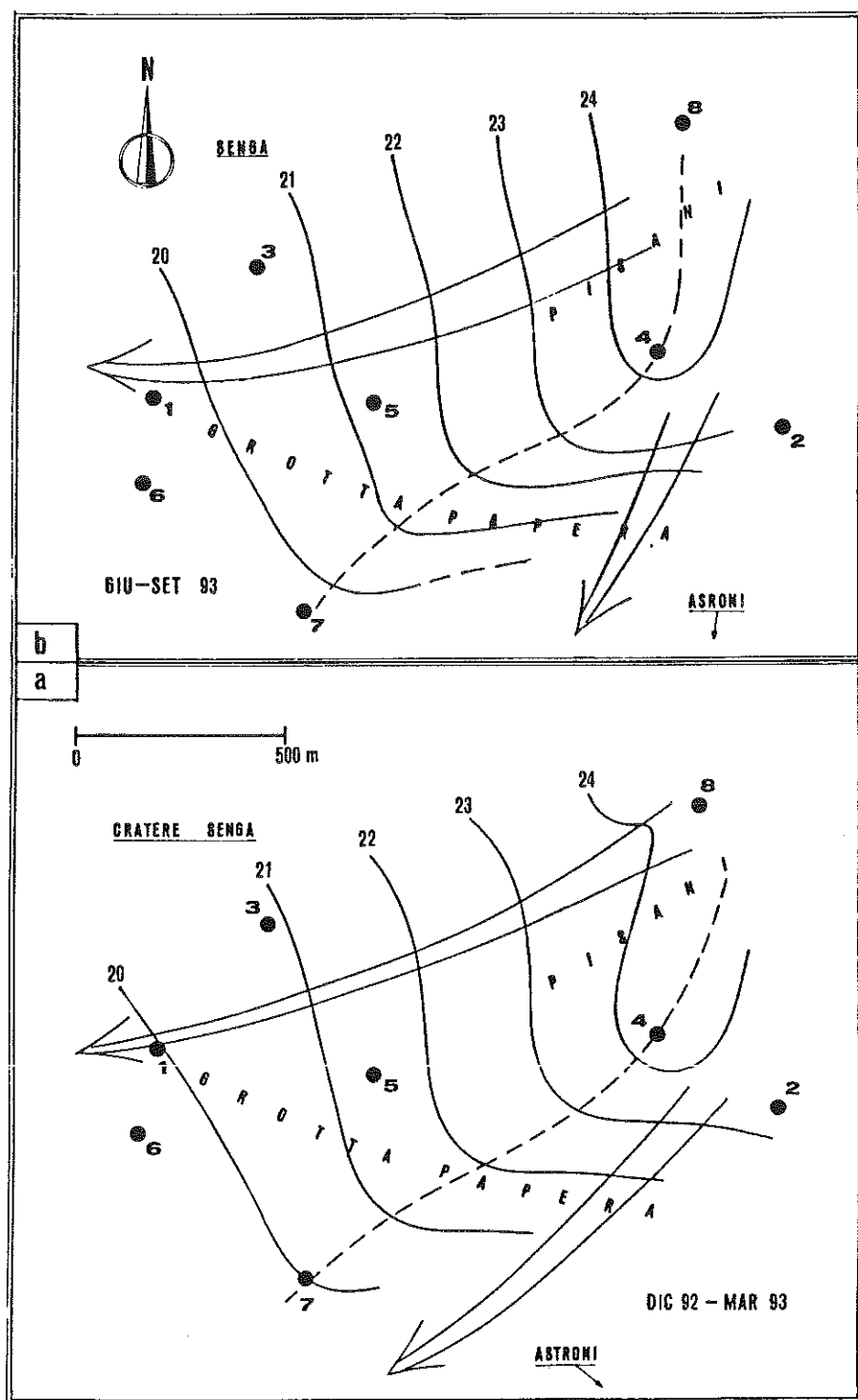


FIG. 4

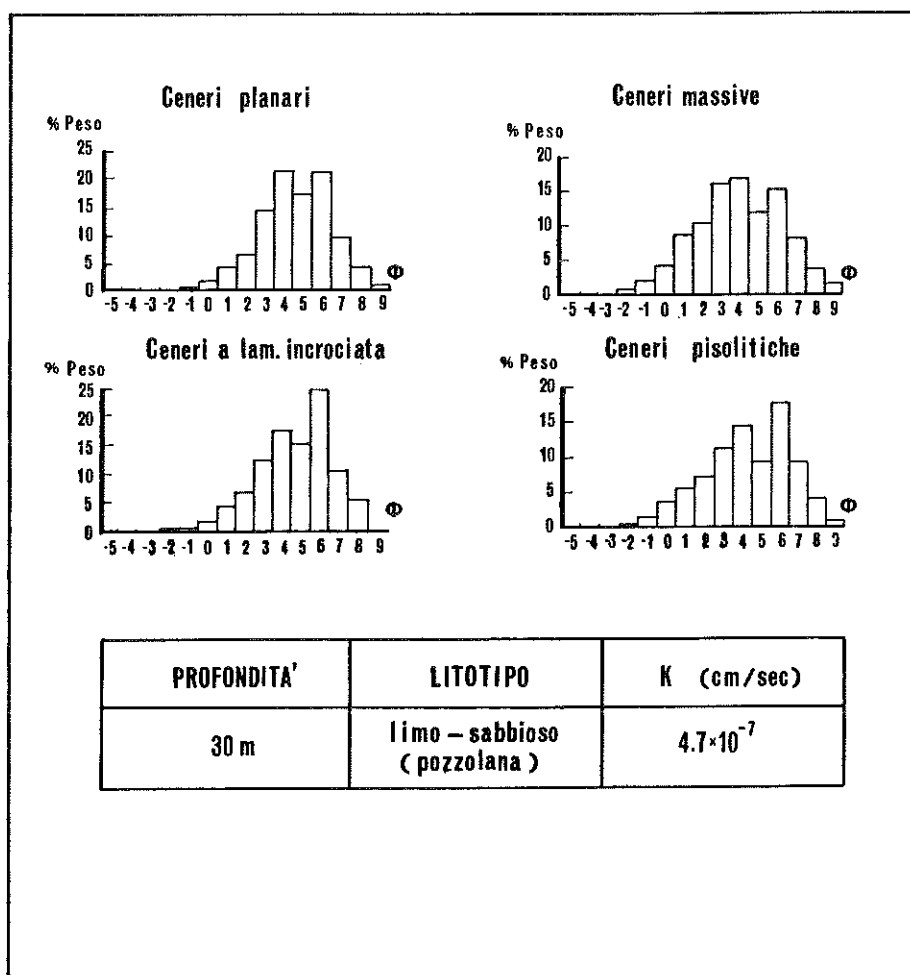


FIG.5

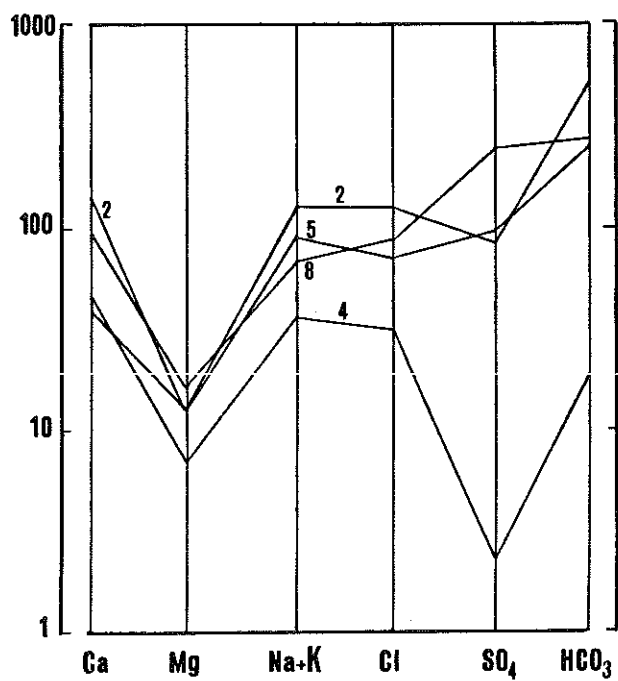
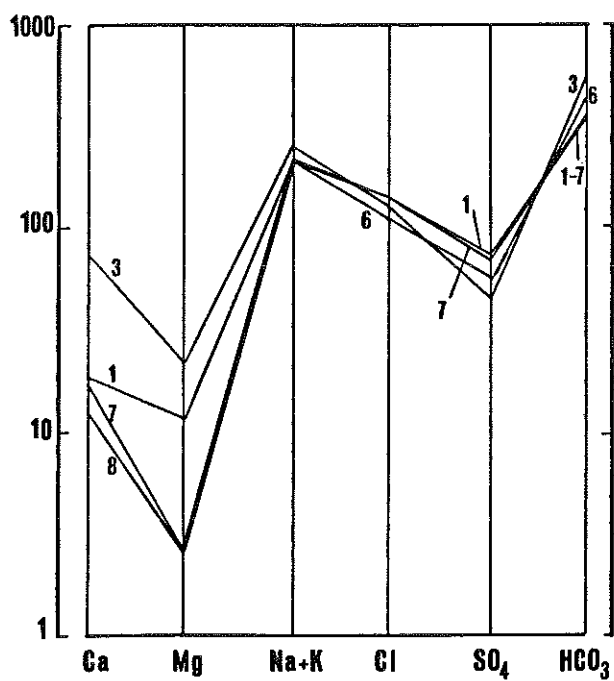


FIG. 6

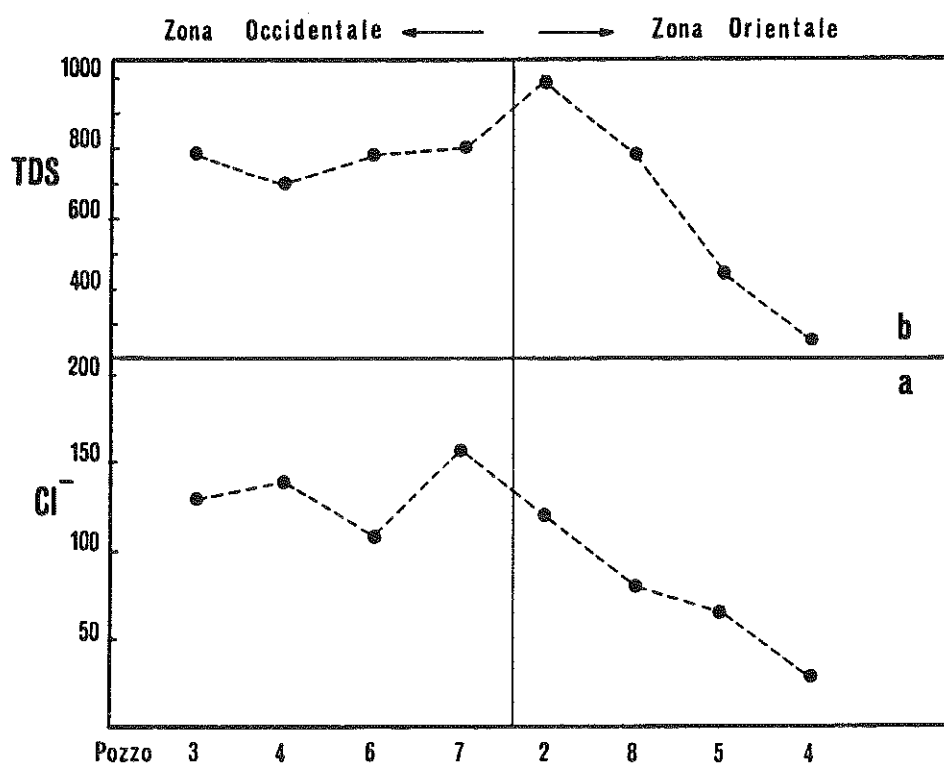


FIG. 7

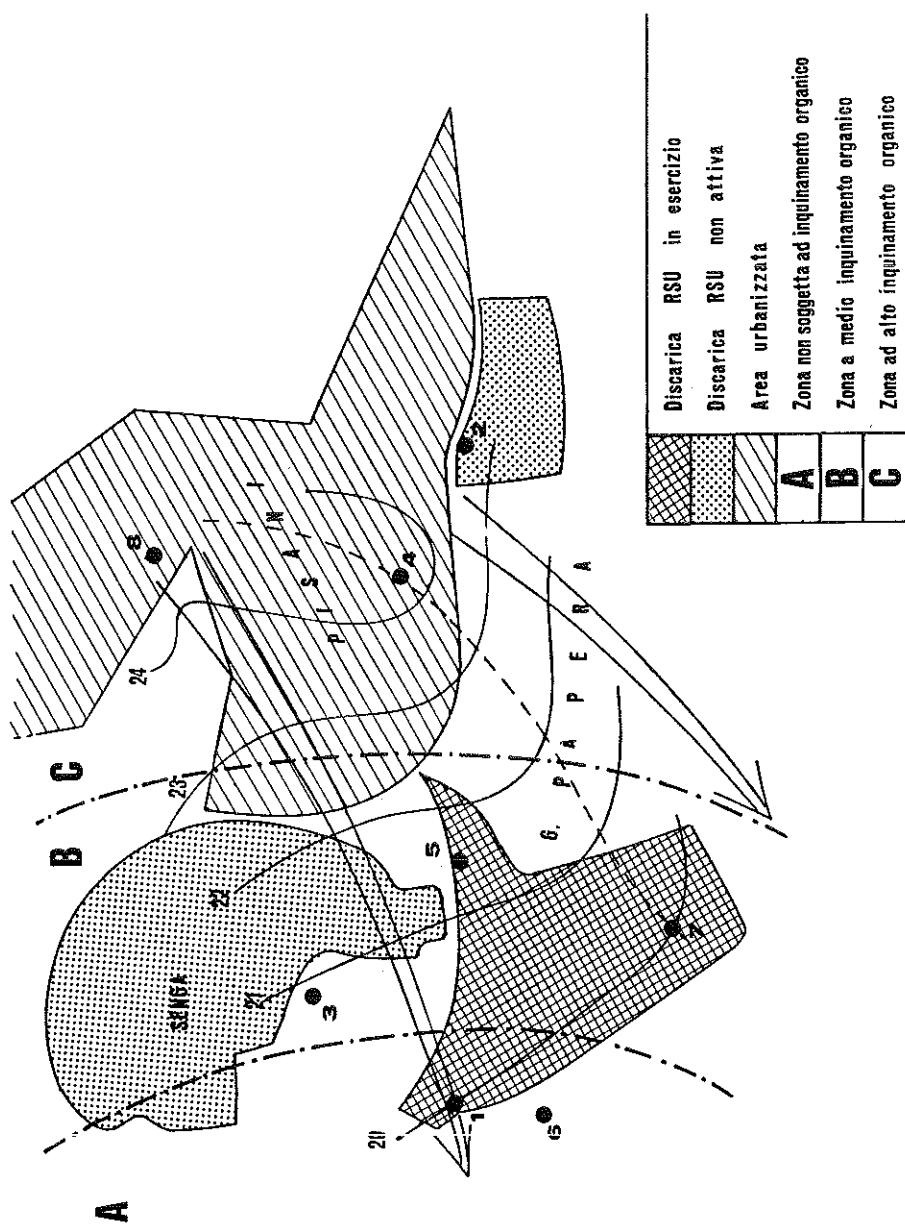


FIG. 8

A L L E G A T O N.1

ANALISI CHIMICHE DELLE ACQUE DEI POZZI N.1-8 NEL PERIODO

DICEMBRE 92 - LUGLIO 93

CAMPIONE N° 1

			1992	1993			
			DIC.	GENN.	FEBBR.	MAR.	GIUG.
							LUG.
TEMPERATURA (°C)			23,8	23,7	23,8	23,7	23,8
CONDUCIBILITA' (uS)			1078	1059	1073	1000	1011
DUREZZA TOTALE (°F)			7	7,5	8,5	9	9,3
RESIDUO a 180°C (mg/l)			755	795	711	713	711
pH			7,4	7,31	7,56	7,57	7,43
SOSTANZE DISCIOLTE IN mg/l							
Ione	SODIO	Na ⁺	184	187	190	179	172
Ione	POTASSIO	K ⁺	40,5	40,6	40,45	32,4	30,48
Ione	STRONZIO	Sr ⁺⁺	0,121	0,119	0,119	0,121	0,113
Ione	LITIO	Li ⁺	0,130	0,126	0,11	0,09	0,1
Ione	FERRO	Fe ⁺⁺	ass.	ass.	ass.	ass.	ass.
Ione	MANGANESE	Mn ⁺⁺	0,069	0,072	0,071	0,081	0,077
Ione	CALCIO	Ca ⁺⁺	22,04	22,09	20,04	18,05	18,01
Ione	MAGNESIO	Mg ⁺⁺	3,64	3,98	8,15	10,94	10,81
Ione	AMMONICO	NH ₄ ⁺	0,25	0,22	0,25	0,20	0,21
Ione	NITROSO	NO ₂ ⁻	0,040	0,043	0,03	0,035	0,030
Ione	NITRICO	NO ₃ ⁻	5	5,5	5	5	5,1
Ione	CLORIDRICO	Cl ⁻	142,84	140,30	140,25	139,60	120,39
Ione	IDROCARBONICO	HCO ₃ ⁻	352,39	350,31	348,75	346,3	344,20
Ione	FOSFORICO	PO ₄ ⁻⁻⁻	0,35	0,34	0,4	0,45	0,36
Ione	SOLFORICO	SO ₄ ⁻⁻	66,73	65,11	65	68,1	61
	SILICE	SiO ₂	69,52	70	36,36	34,6	31,11
METALLI PESANTI							
Ione	ZINCO	Zn ⁺⁺			0,011		0,010
Ione	CADMIO	Cd ⁺⁺			0,004		0,006
Ione	CROMO	Cr ⁺⁺			ass.		ass.
Ione	RAME	Cu ⁺⁺			ass.		"
Ione	PIOMBO	Pb ⁺⁺			ass.		"

CAMPIONE N° 2

			1992	1993			
			DIC.	GENN.	FEBBR.	MAR.	GIUG.
							LUG.
TEMPERATURA (°C)				16,5	16,2	16	16,2
CONDUCEBILITA' (uS)				2790	2850	1320	1400
DUREZZA TOTALE (°F)				115	110	43	42,1
RESIDUO a 180°C (mg/l)				2146	2137	990	1035
pH				7,48	7,53	6,76	6,7
SOSTANZE DISCIOLTE IN mg/l							
Ione	SODIO	Na ⁺		120	123	76	86
Ione	POTASSIO	K ⁺		77,88	77,55	46,8	47
Ione	STRONZIO	Sr ⁺⁺		0,121	0,119	0,83	0,78
Ione	LITIO	Li ⁺		0,027	0,029	0,015	0,02
Ione	FERRO	Fe ⁺⁺		1,82	1,91	0,54	0,52
Ione	MANGANESE	Mn ⁺⁺		2,600	2,596	0,300	0,28
Ione	CALCIO	Ca ⁺⁺		379,9	376,75	152	158
Ione	MAGNESIO	Mg ⁺⁺		39,8	38,91	12,16	13
Ione	AMMONICO	NH ₄ ⁺		0,37	0,37	0,25	0,25
Ione	NITROSO	NO ₂ ⁻		0,080	0,086	0,061	0,061
Ione	NITRICO	NO ₃ ⁻		4,0	3,9	2,75	2,7
Ione	CLORIDRICO	Cl ⁻		400	405	120	130
Ione	IDROCARBONICO	HCO ₃ ⁻		966	962,71	460,7	462
Ione	FOSFORICO	PO ₄ ⁻⁻⁻		ass.	ass.	ass.	ass.
Ione	SOLFORICO	SO ₄ ⁻⁻⁻		61	59	79	79
	SILICE	SiO ₂		23,3	21,33	21,61	22
METALLI PESANTI							
Ione	ZINCO	Zn ⁺⁺			5,42	0,151	3,810
Ione	CADMIO	Cd ⁺⁺			0,021	0,015	0,007
Ione	CROMO	Cr ⁺⁺			0,03	0,01	0,01
Ione	RAME	Cu ⁺⁺			0,01	ass.	0,018
Ione	PIOMBO	Pb ⁺⁺			ass.	ass.	ass.

CAMPIONE N° 3

	1992		1993			
	DIC.	GENN.	FEBBR.	MAR.	GIUG.	LUG.
TEMPERATURA (°C)	15,2	15,4	14,8	14,7	14,6	14,9
CONDUCIBILITA' (uS)	1046	1098	1109	1160	1180	1630
DUREZZA TOTALE (°F)	24	24,5	25,5	27	27,8	31
RESIDUO a 180°C (mg/l)	730	755	780	793	800	1200
pH	6,6	6,8	6,77	6,83	6,91	7,01

SOSTANZE DISCIOLTE IN mg/l

Ione	SODIO	Na ⁺	81,5	82	87	87,2	81,2	94
Ione	POTASSIO	K ⁺	166,5	166	171	156	150	207
Ione	STRONZIO	Sr ⁺⁺	0,101	0,111	0,111	0,112	0,115	0,116
Ione	LITIO	Li ⁺	0,052	0,061	0,061	0,073	0,080	0,076
Ione	FERRO	Fe ⁺⁺	0,077	0,078	0,084	0,069	0,071	0,066
Ione	MANGANESE	Mn ⁺⁺	0,558	0,556	0,6	0,631	0,672	0,711
Ione	CALCIO	Ca ⁺⁺	73,10	74	72,14	72,14	73,11	78,15
Ione	MAGNESIO	Mg ⁺⁺	23,10	23	18,24	21,88	23,04	27,96
Ione	AMMONICO	NH ₄ ⁺	0,25	0,26	0,3	0,35	0,41	0,5
Ione	NITROSO	NO ₂ ⁻	0,30	0,30	0,04	0,040	0,038	0,041
Ione	NITRICO	NO ₃ ⁻	10	10,1	12	12	11,2	12
Ione	CLORIDRICO	Cl ⁻	112,35	118	126,31	127,9	128,6	150
Ione	IDROCARBONICO	HCO ₃ ⁻	546	540	577	537,6	542,5	638,78
Ione	FOSFORICO	PO ₄ ⁻⁻⁻	0,10	0,11	0,15	0,18	0,21	0,26
Ione	SOLFORICO	SO ₄ ⁻⁻⁻	36,93	37	41,43	35,04	47,15	44,5
	SILICE	SiO ₂	41,28	40,98	22,14	18,07	19,11	23,61

METALLI PESANTI

Ione	ZINCO	Zn ⁺⁺		0,008		0,007
Ione	CADMIO	Cd ⁺⁺		0,008		0,0075
Ione	CROMO	Cr ⁺⁺		0,02		0,02
Ione	RAME	Cu ⁺⁺		tracce		ass.
Ione	PIOMBO	Pb ⁺⁺		ass.		ass.

CAMPIONE N° 4

			1992	1993			
			DIC.	GENN.	FEBBR.	MAR.	GIUG.
							LUG.
TEMPERATURA (°C)			15,6	15	15,2	15,1	15,4
CONDUCIBILITA' (uS)			358	360	357	350	401
DUREZZA TOTALE (°F)			13	16,2	16	14	15,6
RESIDUO a 180°C (mg/l)			245	251	249	256	300
pH			6,61	7,3	7,31	7	7,08
SOSTANZE DISCIOLTE IN mg/l							
Ione	SODIO	Na ⁺	15,1	27	26,86	19,3	21,14
Ione	POTASSIO	K ⁺	28,68	12,9	12,76	11,05	11,36
Ione	STRONZIO	Sr ⁺⁺	0,126	0,121	0,13	0,112	0,112
Ione	LITIO	Li ⁺	0,018	0,020	0,021	0,019	0,033
Ione	FERRO	Fe ⁺⁺	0,018	0,018	0,015	0,018	0,014
Ione	MANGANESE	Mn ⁺⁺	0,988	0,911	0,961	0,931	0,966
Ione	CALCIO	Ca ⁺⁺	46,09	56,08	56,11	44,08	55,4
Ione	MAGNESIO	Mg ⁺⁺	3,64	4,98	4,86	7,29	4,92
Ione	AMMONICO	NH ₄ ⁺	0,55	0,70	0,75	0,70	0,77
Ione	NITROSO	NO ₂ ⁻	0,030	0,027	0,025	0,030	0,020
Ione	NITRICO	NO ₃ ⁻	5	4,4	4	4,4	4,4
Ione	CLORIDRICO	Cl ⁻	24,03	28,2	28,25	29,91	27,01
Ione	IDROCARBONICO	HCO ₃ ⁻	181,64	213,3	214,3	174,3	211,31
Ione	FOSFORICO	PO ₄ ⁻⁻⁻	0,15	0,18	0,2	0,23	0,22
Ione	SOLFORICO	SO ₄ ⁻⁻⁻	39,13	19,11	19,26	21,4	18,48
	SILICE	SiO ₂	35,88	10,11	10,48	12,40	11,32
METALLI PESANTI							
Ione	ZINCO	Zn ⁺⁺			0,01		0,018
Ione	CADMIO	Cd ⁺⁺			0,008		0,007
Ione	CROMO	Cr ⁺⁺			assente		assente
Ione	RAME	Cu ⁺⁺			"		"
Ione	PIOMBO	Pb ⁺⁺			"		"

CAMPIONE N° 5

	1992		1993			
	DIC.	GENN.	FEBBR.	MAR.	GIUG.	LUG.
TEMPERATURA (°C)	14,6	14,1	14,3	14,6		14,8
CONDUCIBILITA' (uS)	455	488	482	600		530
DUREZZA TOTALE (°F)	14	16,1	16	15		12
RESIDUO a 180°C (mg/l)	320	349	340	450		370
pH	7,06	6,91	6,93	6,8		7,06
SOSTANZE DISCIOLTE IN mg/l						
Ione SODIO Na ⁺	39,6	47,9	47,74	64,4		50,8
Ione POTASSIO K ⁺	12,38	28,6	28,9	25,8		17,75
Ione STRONZIO Sr ⁺⁺	0,112	0,128	0,131	0,126		0,129
Ione LITIO Li ⁺	0,047	0,030	0,032	0,036		0,15
Ione FERRO Fe ⁺⁺	0,801	0,88	0,82	0,910		0,076
Ione MANGANESE Mn ⁺⁺	1,192	1,4	1,2	1,312		assente
Ione CALCIO Ca ⁺⁺	46,09	48	48,09	40,08		36,07
Ione MAGNESIO Mg ⁺⁺	6,08	9,60	9,72	12,16		7,29
Ione AMMONICO NH ₄ ⁺	0,60	0,52	0,55	0,60		0,36
Ione NITROSO NO ₂ ⁻	0,025	0,021	0,025	0,031		0,029
Ione NITRICO NO ₃ ⁻	3	3,7	3,5	3,9		4,86
Ione CLORIDRICO Cl ⁻	46,54	53,69	54,84	56,48		60,34
Ione IDROCARBONICO HCO ₃ ⁻	184,67	177,4	175,58	230,68		185,2
Ione FOSFORICO PO ₄ ⁻⁻⁻	0,10	0,1	0,1	0,11		0,13
Ione SOLFORICO SO ₄ ⁻⁻⁻	79,53	85,4	86,2	82,06		52
SILICE SiO ₂	74,87	36,98	37,43	30,48		36,40
METALLI PESANTI						
Ione ZINCO Zn ⁺⁺			0,236			0,303
Ione CADMIO Cd ⁺⁺			0,01			0,015
Ione CROMO Cr ⁺⁺			assente			assente
Ione RAME Cu ⁺⁺			"			"
Ione PIOMBO Pb ⁺⁺			"			"

CAMPIONE N° 6

1992			1993			
DIC.	GENN.	FEBBR.	MAR.	GIUG.	LUG.	
TEMPERATURA (°C)		21,4	20,3	25,2	25,4	
CONDUCIBILITA' (uS)		884	830	830	1040	
DUREZZA TOTALE (°F)		4	4	4,11	3,8	
RESIDUO a 180°C (mg/l)		621	612	586	778	
pH		7,9	7,81	7,74	7,6	
SOSTANZE DISCIOLTE IN mg/l						
Ione SODIO	Na ⁺	176,7	187	184	186	
Ione POTASSIO	K ⁺	33,15	28,05	27,4	28,85	
Ione STRONZIO	Sr ⁺⁺	0,12	0,112	0,117	0,121	
Ione LITIO	Li ⁺	0,1	0,14	0,11	0,12	
Ione FERRO	Fe ⁺⁺	0,078	0,081	0,070	0,076	
Ione MANGANESE	Mn ⁺⁺	tracce	tracce	assente	ass.	
Ione CALCIO	Ca ⁺⁺	8,01	12,03	12,63	8,008	
Ione MAGNESIO	Mg ⁺⁺	4,86	2,432	2,711	7,29	
Ione AMMONICO	NH ₄ ⁺	0,3	0,33	0,32	0,36	
Ione NITROSP	NO ₂ ⁻	0,025	0,031	0,026	0,024	
Ione NITRICO	NO ₃ ⁻	4	4,6	4,91	5,11	
Ione CLORIDRICO	Cl ⁻	108	108,03	117	103,3	
Ione IDROCARBONICO	HCO ₃ ⁻	333,6	342,09	345,12	337,25	
Ione FOSFORICO	PO ₄ ⁻⁻⁻	ass.	assente	assente	ass.	
Ione SOLFORICO	SO ₄ ⁻⁻⁻	50,97	48,02	52,11	51,10	
SILICE	SiO ₂	14,01	21,92	27,61	31,46	
METALLI PESANTI						
Ione ZINCO	Zn ⁺⁺	0,012			0,018	
Ione CADMIO	Cd ⁺⁺	0,007			0,008	
Ione CROMO	Cr ⁺⁺	tracce			tracce	
Ione RAME	Cu ⁺⁺	ass.			ass.	
Ione PIOMBO	Pb ⁺⁺	ass.			"	

CAMPIONE N° 7

1992			1993			
DIC.	GENN.	FEBBR.	MAR.	GIUG.	LUG.	
TEMPERATURA (°C)			22,8	23,3	23,3	
CONDUCIBILITA' (uS)			1070	1041	1200	
DUREZZA TOTALE (°F)			5	5	4,5	
RESIDUO a 180°C (mg/l)			805	780	892	
pH			7,93	7,9	7,61	
SOSTANZE DISCIOLTE IN mg/l						
Ione	SODIO	Na ⁺	181	189	202	
Ione	POTASSIO	K ⁺	33,6	37,4	31,5	
Ione	STRONZIO	Sr ⁺⁺	0,114	0,118	0,121	
Ione	LITIO	Li ⁺	0,07	0,066	0,073	
Ione	FERRO	Fe ⁺⁺	ass.	ass.	ass.	
Ione	MANGANESE	Mn ⁺⁺	0,073	0,089	0,090	
Ione	CALCIO	Ca ⁺⁺	16,03	16,03	12,02	
Ione	MAGNESIO	Mg ⁺⁺	2,432	2,432	3,65	
Ione	AMMONICO	NH ₄ ⁺	0,11	0,13	0,18	
Ione	NITROSO	NO ₂ ⁻	0,015	0,011	0,012	
Ione	NITRICO	NO ₃ ⁻	5	5,9	6,4	
Ione	CLORIDRICO	Cl ⁻	127,89	127,4	136,70	
Ione	IDROCARBONICO	HCO ₃ ⁻	363,22	356,59	363,70	
Ione	FOSFORICO	PO ₄ ⁻⁻⁻	0,33	0,31	0,37	
Ione	SOLFORICO	SO ₄ ⁻⁻⁻	71,4	66,44	60,5	
	SILICE	SiO ₂	22,78	20,21	26,09	
METALLI PESANTI						
Ione	ZINCO	Zn ⁺⁺	0,015		0,018	
Ione	CADMIO	Cd ⁺⁺	0,006		0,005	
Ione	CROMO	Cr ⁺⁺	0,01		0,01	
Ione	RAME	Cu ⁺⁺	ass.		ass.	
Ione	PIOMBO	Pb ⁺⁺	"		"	

CAMPIONE N° 8

			1992	1993				
			DIC.	GENN.	FEBBR.	MAR.	GIUG.	LUG.
TEMPERATURA (°C)						15,5	15,4	15,7
CONDUCTIBILITA' (uS)						1050	1040	1085
DUREZZA TOTALE (°F)						32	32	36
RESIDUO a 180°C (mg/l)						786	780	813
pH						7,10	7,12	7,07
SOSTANZE DISCIOLTE IN mg/l								
Ione	SODIO	Na ⁺				56,7	56,64	65,58
Ione	POTASSIO	K ⁺				100	102	31,3
Ione	STRONZIO	Sr ⁺⁺				0,112	0,115	0,13
Ione	LITIO	Li ⁺				0,016	0,017	0,020
Ione	FERRO	Fe ⁺⁺				0,011	0,013	0,017
Ione	MANGANESE	Mn ⁺⁺				0,598	0,617	0,609
Ione	CALCIO	Ca ⁺⁺				106,3	104,2	110
Ione	MAGNESIO	Mg ⁺⁺				14,98	14,59	20,67
Ione	AMMONICO	NH ₄ ⁺				0,80	0,81	0,76
Ione	NITROSO	NO ₂ ⁻				0,038	0,042	0,036
Ione	NITRICO	NO ₃ ⁻				5,1	4,9	5,4
Ione	CLORIDRICO	Cl ⁻				81,60	81,58	76,68
Ione	IDROCARBONICO	HCO ₃ ⁻				260	257,32	247,64
Ione	FOSFORICO	PO ₄ ⁻⁻⁻				0,20	0,21	0,26
Ione	SOLFORICO	SO ₄ ⁻⁻⁻				232,4	232,55	248
	SILICE	SiO ₂				16,5	16,93	19,04
METALLI PESANTI								
Ione	ZINCO	Zn ⁺⁺				0,015	0,015	0,016
Ione	CADMIO	Cd ⁺⁺				0,004	0,0035	0,0035
Ione	CROMO	Cr ⁺⁺				ass.	ass.	ass.
Ione	RAME	Cu ⁺⁺				"	"	"
Ione	PIOMBO	Pb ⁺⁺				"	"	"

CAMPIONE POZZI N.		1	3	5
TEMPERATURA (°C)		22°,3	15°	16°
CONDUCIBILITA' (uS)		996	1134	473
DUREZZA TOTALE (°F)		50	27°,5	120
RESIDUO a 180°C (mg/l)		698	782	326
PH		8,13	7,6	7,22
SOSTANZE DISCIOLTE IN mg/l				
Ione SODIO	Na ⁺	170	77,4	46,8
Ione POTASSIO	K ⁺	36	182,4	28,5
Ione STRONZIO	Sr ⁺⁺	-	-	-
Ione LITIO	Li ⁺	-	-	-
Ione FERRO	Fe ⁺⁺	0,21	0,11	0,62
Ione MANGANESE	Mn ⁺⁺	-	-	-
Ione CALCIO	Ca ⁺⁺	12,02	82,16	40,08
Ione MAGNESIO	Mg ⁺⁺	4,86	17,02	4,86
Ione AMMONICO	NH ₄ ⁺	0,036	0,021	0,015
Ione NITROSO	NO ₂ ⁻	0,015	0,013	0,05
Ione NITRICO	NO ₃ ⁻	0,011	0,06	0,04
Ione CLORIDRICO	CL ⁻	98	138,25	61,25
Ione IDROCARBONICO	HCO ₃ ⁻	347,52	567,01	170,70
Ione FOSFORICO	PO ₄ ⁻	0,08	0,015	0,07
Ione SOLFORICO	SO ₄ ⁻	49,7	34,06	40,25
SILICE	SIO ₂	55,74	26,52	45,77

ANALISI BATTERIOLOGICHE

POZZO N. 1

	1992	1993				
	DICEMBRE	FEBBRAIO	MARZO	GIUGNO	LUGLIO	SETTEMBRE
COLIFORMI TOTALI (100 ml)	0	20	0	30	10	
COLIFORMI FECALI (100 ml)	0	0	0	2	0	
STREPTOCOCCI FECALI (100 ml)	0	0	0	0	0	
CLOSTRIDI SOLFITO R (50 ml)	0	0	0	0	0	

POZZO N. 2

	1992	1993				
	DICEMBRE	FEBBRAIO	MARZO	GIUGNO	LUGLIO	SETTEMBRE
COLIFORMI TOTALI (100 ml)*		50	40	50	100	
COLIFORMI FECALI (100 ml)*		0	0	5	20	
STREPTOCOCCI FECALI (100 ml)*		0	0	2	10	
CLOSTRIDI SOLFITO (50 ml)**		1	1	1	2	

* CONCENTRAZIONE SECONDO LE NORME CEE : 0 → 100 ml

** " " " " : 0 → 50 ml

ANALISI BATTERIOLOGICHE

POZZO N. 3

	1992	1993				
	DICEMBRE	FEBBRAIO	MARZO	GIUGNO	LUGLIO	SETTEMBRE
COLIFORMI TOTALI (100 ml)	10	200	2		10	
COLIFORMI FECALI (100 ml)	0	2	0		0	
STREPTOCOCCI FECALI (100 ml)	0	0	0		0	
CLOSTRIDI SOLFITO R (50 ml)	0	0	0		0	

POZZO N. 4

	1992	1993				
	DICEMBRE	FEBBRAIO	MARZO	GIUGNO	LUGLIO	SETTEMBRE
COLIFORMI TOTALI (100 ml)*	20	1500	50	80	5	
COLIFORMI FECALI (100 ml)*	5	10	0	1	0	
STREPTOCOCCI FECALI (100 ml)*	5	5	0	1	0	
CLOSTRIDI SOLFITO (50 ml)**	10	2	0	2	0	

* CONCENTRAZIONE SECONDO LE NORME CEE : 0 → 100 ml

** " " " " : 0 → 50 ml

ANALISI BATTERIOLOGICHE

POZZO N. 5

	1992	1993			
	DICEMBRE	FEBBRAIO	MARZO	GIUGNO	LUGLIO SETTEMBRE
COLIFORMI TOTALI (100 ml)	2	1400	400	100	
COLIFORMI FECALI (100 ml)	0	5	50	5	
STREPTOCOCCI FECALI (100 ml)	0	2	20	2	
CLOSTRIDI SOLFITO R (50 ml)	1	1	10	1	

POZZO N. 6

	1992	1993			
	DICEMBRE	FEBBRAIO	MARZO	GIUGNO	LUGLIO SETTEMBRE
COLIFORMI TOTALI (100 ml)*		80	10	50	0
COLIFORMI FECALI (100 ml)*		0	0	0	0
STREPTOCOCCI FECALI (100 ml)*		0	0	0	0
CLOSTRIDI SOLFITO (50 ml)**		0	0	0	0

* CONCENTRAZIONE SECONDO LE NORME CEE : 0 → 100 ml

** " " " " : 0 → 50 ml

ANALISI BATTERIOLOGICHE

POZZO N. 7

1992

DICEMBRE

COLIFORMI TOTALI (100 ml)
COLIFORMI FECALI (100 ml)
STREPTOCOCCI FECALI (100 ml)
CLOSTRIDI SOLFITO R (50 ml)

1993

FEBBRAIO MARZO GIUGNO LUGLIO SETTEMBRE

50 40 20 20
0 1 2 0
0 0 1 0
1 0 0 0

POZZO N. 8

1992

DICEMBRE

COLIFORMI TOTALI (100 ml)*
COLIFORMI FECALI (100 ml)*
STREPTOCOCCI FECALI (100 ml)*
CLOSTRIDI SOLFITO (50 ml)**

1993

FEBBRAIO MARZO GIUGNO LUGLIO SETTEMBRE

200 20 20 20
3 1 2
2 1 4
1 0 1

* CONCENTRAZIONE SECONDO LE NORME CEE : 0 → 100 ml

** " " " : 0 → 50 ml

DETERMINATION OF MONOSACCHARIDE COMPOSITION IN GLYCOPROTEINS
USING GAS-CHROMATOGRAPHY MASS SPECTROMETRY

Nota di Rosa Siciliano, Antonio Cantilena, Angela Amoresano
and Piero Pucci¹

Presentata dal Socio Lorenzo Mangoni

Adunanza del 6/11/1993

Riassunto - E' stata descritta una strategia generale per la determinazione della composizione in monosaccaridi di glicoproteine utilizzando tecniche di gas-cromatografia-spettrometria di massa. Due diversi tipi di derivati dei monosaccaridi sono stati preparati ed analizzati e i vantaggi delle due procedure sono discussi.

Summary - A general strategy for the determination of the monosaccharide composition of glycoproteins using gas-chromatography mass spectrometry was described. Two different monosaccharide derivatives were prepared and analyzed and the advantages of the two procedures are discussed.

Glycoproteins are ubiquitous constituents of almost all living organisms and function as enzymes, antibodies, structural proteins, carrier proteins, membrane transport proteins and receptors. Oligosaccharide chains in glycoproteins can be linked either to the side chain nitrogen of asparagine residues (N-glycosidic linkage) or to the side chain oxygen of serine or threonine residues (O-glycosidic linkage) (1).

¹Servizio di Spettrometria di Massa del CNR and Dipartimento di Chimica Organica e Biologica, Via Mezzocannone 16, 80134 Napoli, Italy

The chemical structures of oligosaccharide chains confer important physical properties such as conformational stability and protease resistance to many glycoproteins. More significant, however, are the roles of these carbohydrate moieties in biological functions, where they provide signals for cell-cell and/or cell-matrix interactions and protein targetting (2). Moreover, defects in the glycosystem machinery are often involved in serious illnesses and many studies have shown the relevant role of carbohydrate moieties on the surface of malignant cells during the development of cancer (3).

The first step towards a complete structural characterization of the oligosaccharide chains of glycoproteins consists of the qualitative and quantitative analysis of the monosaccharides present in the glycosidic moieties. This is a rather difficult analytical problem which is often not amenable to classical biochemical procedures. This paper describes the determination of the sugar compositions in glycoproteins using gas-chromatography mass spectrometric techniques. The analysis of two different monosaccharide derivatives is reported and the advantages of both procedures are underlined.

MATERIALS AND METHODS

All reagents and solvents were of the highest quality available from Sigma, BDH and Fluka.

Alditole acetate derivatives

Glycoproteins were hydrolyzed with 2M trifluoroacetic acid for 2 hrs at 121°C, reduced with 10 mg/ml sodium borohydride (NaBH_4) in 2M NH_4OH at room temperature for 2 hrs and then acetylated with acetic anhydride at 100°C for 1 hr. Alditole acetate derivatives were separated from the amino acidic components by extraction with chloroform. The organic phase was dried down and redissolved in n-hexane for GC-MS analysis.

Trimethylsilyl (TMS)-derivatives

Glycoproteins were submitted to methanolysis with 500 μl 1M HCl in methanol at 80°C for 16 hrs. Monosaccharides were then re-N-acetylated by addition of 50 μl acetic anhydride in 500 μl methanol containing 10 μl pyridine. The reaction was carried out at room temperature for 15 minutes. Trimethylsilylation was carried out using 100 μl N-O-Bis-(trimethylsilyl)-trifluoroacetamide at 70°C for 15 min. The TMS-derivatives were dried down and redissolved in n-hexane for GC-MS analysis.

GC-MS analysis

GC-MS analysis of both derivatives was performed using a VG Trio 2000 quadrupole mass spectrometer equipped with a Hewlett Packard 5890 gas chromatograph. The analysis of alditole acetate derivatives was carried out by injection of the samples at 90°C and increasing the temperature to 180°C at 20°C/min and then to 220°C at 1°C/min. The TMS-derivatives were analyzed by loading the samples at 90°C and increasing the temperature to 140°C at 25°C/min, then to 200°C at 4°C/min and finally to 280°C at 8°C/min.

RESULTS AND DISCUSSION

As a general strategy for the determination of sugar composition, oligosaccharide chains are chemically cleaved so that free monosaccharides are released from the glycoprotein. These are then derivatized to obtain volatile compounds suitable for GC-MS analysis. Identification of the individual components in the mixture can be achieved both from the retention times and characteristic EI spectrum.

Fig. 1A shows the GC-MS analysis of the alditole acetate derivatives from the glycosidic moiety of an unknown glycoprotein. The total ion current (TIC) chromatogram demonstrates that the temperature gradient performs a good separation of all the monosaccharides. However, different classes of sugars exhibit different chromatographic behaviours leading to the definition of three regions in the chromatogram. Pentoses and fucose were eluted in the first

region between 10-11 min, hexoses emerged between 14 and 17 minutes and, finally, hexosamines were detected in the third region after 20 min.

The alditol acetate procedure is very sensitive for the analysis of pentose and hexose residues, but the amino sugars, eluted at longer retention times, were poorly recovered. In order to improve the sensitivity, especially for the detection of GalNAc, GC-MS analysis can be carried out using Select Ion Monitoring (SIM) techniques choosing strong fragment peaks in the EI spectra of hexosamine components.

The fragment ion at m/z 144 was selected for SIM analysis of hexosamines. The resulting chromatogram is shown in Fig. 1B. SIM analysis improved the detection limits for both the amino sugars, as shown by the increase of the corresponding peaks at 20.93 and 21.92 retention times respectively, shown in Figure 1B.

An alternative approach consists in the analysis of monosaccharides as TMS derivatives. Figure 2A shows the TIC chromatogram obtained from the GC-MS analysis of TMS-monosaccharides released from a glycoprotein. Derivatization with TMS can be used for the detection of both hexoses and hexosamines. Moreover, sialic acids are not degraded during methanolysis of the glycoprotein and can be detected using this procedure.

The TMS-derivatives of amino sugars are analyzed and a good yield is obtained. However, better sensitivity can be achieved using the Select Ion Monitoring technique with

detection of ions at m/z 173 for hexosamines and 298 for sialic acids. The resulting chromatograms are shown in Fig. 2B and 2C respectively. It should be underlined that TMS-derivatives are less stable than the alditole acetates and the analysis should be carried out shortly after derivatization.

CONCLUSIONS

The determination of monosaccharide composition in glycoprotein studies is very informative. This is definitely the key analysis to confirm the presence of carbohydrates linked to an unknown glycoprotein, to obtain the first piece of information on the kind of glycosylation and finally to choose the most suitable strategy for a complete characterization of glycans.

The presence of GlcNAc, in fact, indicates the presence of N-linked oligosaccharides, whereas the presence of GalNAc can be related to O-linked structures. Moreover, if mannose is the only hexose detected, this suggests the presence of N-linked sugars of the high-mannose type, whereas, if mannose and galactose are detected, a complex and/or hybrid structure is suspected.

The two strategies described here can give complementary results. The alditole acetate procedure is very sensitive for the analysis of hexoses but TMS-derivatives give much better results for amino sugars. Furthermore, during the hydrolysis step, sialic acid residues are degraded, whereas

they are stable under conditions in which methanolysis of the glycoprotein takes place. Therefore, a quantitative analysis of the sialic acid residues can be achieved using the TMS procedure.

REFERENCES

1. Rademachez, T. W., Parekh, R. B. and Dwek, R. A. (1988) Glycobiology. *Ann. Rev. Biochem.* 57, 785-838.
2. Varki, A. (1993) Biological roles of oligosaccharides: all of the theories are correct. *Glycobiology* 3, 97-130.
3. Hakomori, S. (1989) Aberrant glycosylation in tumors and tumor associated carbohydrate antigens. *Adv. Cancer Res.* 52, 257-331.

FIGURE LEGENDS

Figure 1. Total ion current (TIC) chromatogram from the GC-MS analysis of alditole acetate derivatives (A) and Select Ion Monitoring analysis of fragment ion at m/z 144 (B).

(Fuc - Fucose; Man - Mannose; Gal - Galactose; Glc - Glucose; GlcNAc - N-acetyl-glucosamine; GalNAc - N-acetylgalactosamine).

Figure 2. Total ion current (TIC) chromatogram from the GC-MS analysis of TMS-derivatives (A) and Select Ion Monitoring analysis of fragment ions at m/z 173 (B) and 298 (C).

(Fuc - Fucose; Man - Mannose; Gal - Galactose; Glc - Glucose; GlcNAc - N-acetyl-glucosamine; GalNAc - N-acetylgalactosamine; NeuAc - Neuraminic acid or Sialic acid).

